WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE

XI 2

FEDERIGO ENRIQUES

PROBLEME DER WISSENSCHAFT

II. TEIL

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN



V. Band: **Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem.** Von G. H. Darwin-Cambridge. Deutsch von A. Pockels-Braunschweig. Mit einem Einführungswort von G. v. Neumayer u. 43 Illustrationen. 1902. Geb. *M.* 6.80.

Nach einer Übersicht über die Erscheinungen der Ebbe und Flut, der Seeschwankungen, der besonderen Flutphänomene sowie der Beobachtungsmethoden werden in sehr anschaulicher, durch Figuren erläuterter Weise die fluterzeugenden Kräfte, die Theorien der Gezeiten sowie die Herstellung von Gezeitentafeln erklärt. Die folgenden Kapitel sind geophysikalischen und astronomischen Fragen, die mit der Einwirkung der Gezeitenkräfte auf die Weltkörper zusammenhängen, gewidmet.

VI. Band: **Das Prinzip der Erhaltung der Energie.** Von Max Planck-Berlin. 2. Auflage. 1908. Geb. *M.* 6.—

In drei Abschnitten wird behandelt: die historische Entwicklung des Prinzips von seinen Uranfängen bis zu seiner allgemeinen Durchführung in den Arbeiten von Mayer, Joule, Helmholtz, Clausius, Thomson; die allgemeine Definition des Energiebegriffs, die Formulierung des Erhaltungsprinzips nebst einer Übersicht und Kritik über die versuchten Beweise; schließlich die Darlegung, wie man durch Anwendung des Prinzips zu einer einheitlichen Übersicht über die Gesetze der gesamten Erscheinungswelt gelangen kann.

VII. Band: **Grundlagen der Geometrie.** Von D. Hilbert-Göttingen. 3. Auflage. 1909. Geb. *M.* 6.—

Diese Untersuchung ist ein Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zutage tritt.

VIII. Band: **Das Wissen unserer Zeit in Mathematik und Naturwissenschaft.** Von É. Picard-Paris. Deutsch von F. u. L. Lindemann-München. [Unter der Presse.]

Der Verfasser hat versucht, in diesem Buche eine zusammenfassende Übersicht über den Stand unseres Wissens in Mathematik, Physik und Naturwissenschaften in den ersten Jahren des 20. Jahrhunderts zu geben. Man findet die verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen man heute den Begriff der wissenschaftlichen Erklärung betrachtet, ebenso wie die Rolle, die hierbei die Theorien bilden, eingehend erörtert.

IX. Band: **Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart.** Von P. Volkmann-Königsberg i. P. 2. Auflage. 1910. Geb. *M.* 6.—

Durch die sichtliche Zunahme der erkenntnistheoretischen Interessen auf allen Gebieten der Naturwissenschaften war dem Verfasser der Weg für die Neubearbeitung der inzwischen notwendig gewordenen zweiten Auflage vorgezeichnet, seine späteren erkenntnistheoretischen Untersuchungen in die Grundzüge einzuarbeiten und damit eine weitere Durcharbeitung des gesamten für ihn in Betracht kommenden Gegenstandes zu versuchen, ohne daß dabei Richtung und Ergebnis seiner bisherigen Studien eine wesentliche Änderung erfahren konnten.

X. Band: **Wissenschaft und Religion in der Philosophie unserer Zeit.** Von É. Boutroux-Paris. Deutsch von E. Weber-Straßburg i. E. 1910. Geb. M 6.—

Die Frage nach den Beziehungen zwischen Wissenschaft und Religion ist ein Problem, mit dem sich wohl jeder denkende Mensch schon beschäftigt hat, und über das er gerne einigen Aufschluß haben möchte. Boutroux zeigt uns in klarer und anschaulicher Weise die Ideen einiger der größten Denker über diesen Punkt. Er übt aber auch strenge Kritik und verhehlt uns nicht alle die Schwierigkeiten und Einwendungen, die sich gegen jedes dieser Systeme erheben lassen. So darf das Werk allgemeines Interesse beanspruchen.

XI. Band: **Probleme d. Wissenschaft.** Von F. Enriques-Bologna. Deutsch von K. Grelling-Göttingen. 2 Teile. 1910.

I. Teil: **Wirklichkeit und Logik.** Geb. M 4.—
II. — **Die Grundbegriffe der Wissenschaft.** Geb. ca. M 5.—

Der Plan des Werkes ist ein sehr umfassender. Es handelt sich um eine neue Theorie der Erkenntnis, welche der Verfasser durch eine gründliche Analyse der Fragen der Logik und Psychologie entwickelt, dabei die verschiedenen Zweige der Wissenschaft, von der Mathematik, der Mechanik, der Physik, der Chemie bis zur Biologie, der Wirtschaftslehre und der Geschichte usw. berührend.

XII. Band: **Die log. Grundlagen d. exakten Wissenschaften.** Von P. Natorp-Marburg. 1910. Geb. M 6.60.

Das Buch, das gleichsam eine nach modernen Begriffen reformierte „Kritik der reinen Vernunft" darstellt, versucht eine in den Hauptzügen vollständige, geschlossene Philosophie der exakten Wissenschaften zu bieten, wobei ein strenger Systemzusammenhang, der von den logischen durch die mathematischen zu den mechanischen Prinzipien und damit zu denen der gesamten Physik herabreicht, angestrebt ist.

In Vorbereitung (genaue Fassung der Titel vorbehalten):

Anthropologie und Rassenkunde. Von E. v. Baelz-Stuttgart.
Prinzipien der vergleichenden Anatomie. Von H. Braus-Heidelberg.
Die Erde als Wohnsitz des Menschen. Von K. Dove-Jena.
Das Gesellschafts- und Staatenleben im Tierreich. Von K. Escherich-Tharandt.
Prinzipien der Sprachwissenschaft. Von N. N.
Erdbeben und Gebirgsbau. Von Fr. Frech-Breslau.
Grundlagen der Natur- und Geisteswissenschaften. Von Dr. M. Frischeisen-Köhler-Berlin.
Die pflanzengeographischen Wandlungen der deutschen Landschaft. Von H. Hausrath-Karlsruhe.
Reizerscheinungen der Pflanzen. Von L. Jost-Bonn-Poppelsdorf.
Geschichte der Psychologie. Von O. Klemm-Leipzig.
Die Materie im Kolloidalzustand. Von V. Kohlschütter-Straßburg i. E.
Vorfahren und Vererbung. Von F. Le Dantec-Paris. Deutsch von H. Kniep-Freiburg i. B.
Die wichtigsten Probleme der Mineralogie und Petrographie. Von G. Linck-Jena.
Wissenschaft und Methode. Von H. Poincaré-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München.
Botan. Beweismittel f. d. Abstammungslehre. Von H. Potonié-Berlin.
Mensch und Mikroorganismen unter besonderer Berücksichtigung des Immunitätsproblems. Von H. Sachs-Frankfurt a. M.
Grundfragen der Astronomie, der Mechanik und Physik der Himmelskörper. Von H. v. Seeliger-München.
Meteorologische Zeit- und Streitfragen. Von R. Süring-Berlin.

Die Sammlung wird fortgesetzt.

FEDERIGO ENRIQUES

[Problemi della scienza, deutsch.]

PROBLEME DER WISSENSCHAFT

ZWEITER TEIL

DIE GRUNDBEGRIFFE DER WISSENSCHAFT

ÜBERSETZT VON

KURT GRELLING



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910



Inhaltsverzeichnis.

Kapitel IV. **Die Geometrie.**

A. Die reale Bedeutung der Geometrie.

B. Die psychologische Entstehung der geometrischen Begriffe.

Kapitel V. **Die Mechanik.**

Die reale Bedeutung und psychologische Entwickelung der Grundsätze.

Kapitel VI. Die Erweiterung der Mechanik.

A. Die Physik als Erweiterung der Mechanik.

B. Die mechanistische Hypothese und die Lebenserscheinungen.



Kapitel IV.

Die Geometrie.

A. Die reale Bedeutung der Geometrie.

§ 1. Einleitung.

Der Geometrie muß man, scheint es, im Gebiete der philosophischen Studien einen Ehrenplatz anweisen!

In Griechenland war sie ein mächtiges Hilfsmittel der Verstandeserziehung und half zusammen mit der Rhetorik die Wissenschaft des Denkens auszubilden. Noch heute wirft die neue kritische Geometrie auf sie, wie wir sahen, ein lebhaftes Licht. Anderseits beginnt die Gedankenbewegung, der wir unsere moderne europäische Kultur verdanken, mit einer Schule von Philosophen, die zugleich Geometer waren. War doch DESCARTES der Begründer und LEIBNIZ der Erneuerer jener rationalistischen Philosophie, die im Kampfe mit dem Empirismus die Geister erzog und so ein Werkzeug des Fortschritts wurde, aus dem die modernen Ansichten hervorgingen. Auch die beiden Denker, die den größten Einfluß auf die Spekulation des neunzehnten Jahrhunderts ausgeübt haben, IMMANUEL KANT und AUGUSTE COMTE verdankten einen großen Teil ihrer Kraft einer geometrischen Erziehung. Vor allem aber hat der Fortschritt der Geometrie in diesem Jahrhundert auf die Entwickelung des Rationalismus eingewirkt, der, nachdem er sich aus seinem Ursprungsland entfernt hatte, sich zu immer höheren und kühneren Flügen erhob, und zwar vermöge eines wahrhaft wunderbaren Resultates: der Konstruktion der nichteuklidischen

Geometrien. Durch sie wurde es klar, daß unsere geometrischen Begriffe, soweit sie sich auf die wahrnehmbare Wirklichkeit beziehen, keineswegs auf jene strenge Gewißheit Anspruch machen können, die als eines der stärksten Argumente für ihren apriorischen Charakter angesehen wurde.

Neue Gedanken und kühnere Versuche der Philosophie der Geometrie entstanden aus dieser Ansicht und versuchten auf verschiedenen Wegen das physikalische Problem der Struktur des Raumes zu erhellen. Diese Entwickelung reicht von den Untersuchungen der Gauss, Lobatschewsky, Bolyai, Riemann, Helmholtz bis zu den allerneuesten, die wir in unserem auf S. 165 zitierten Artikel über die „Prinzipien der Geometrie" dargestellt haben, und auf die wir uns zum Teil in den folgenden Paragraphen beziehen.

§ 2. Realismus und Nominalismus.

Gegen die angedeuteten Entwickelungen oder wenigstens gegen ihre im allgemeinen von den Mathematikern angenommene Deutung wird noch immer von den Philosophen der Kantischen Schule der Einwand erhoben: man könne nicht von der Geometrie als von einer physikalischen Wissenschaft sprechen, weil der Raum kein wirklicher Gegenstand, sondern nur eine subjektive Form der Sinnesanschauung ist.

Und diese Behauptung kehrt, in anderem Gewande, in neueren kritischen Untersuchungen wieder.

Der Streit zwischen Realismus und Nominalismus in der Geometrie ist einer der schwierigsten und für die allgemeine Philosophie wichtigsten. Und es handelt sich nicht so sehr darum, zwischen zwei klar aufgestellten einander widersprechenden Behauptungen zu entscheiden, sondern, wie so oft, den Sinn zu bestimmen, in dem die

beiden Behauptungen ohne Widerspruch aufrecht erhalten werden können.

Durch eine solche Prüfung wird also klargestellt werden, daß das negative Ergebnis, zu dem gewisse Formulierungen des Raumproblems führen, nicht die Möglichkeit ausschließt, den geometrischen Realismus als berechtigt anzuerkennen, und daran schließt sich das positive Ergebnis, daß die in der Geometrie enthaltenen Tatsachen ins Licht gesetzt werden.

So tritt der Behauptung KANTS, die die Existenz eines wirklichen Gegenstandes, der dem Wort „*Raum*" entspräche, leugnet, mit HERBART die Erkenntnis der Realität der „*räumlichen Beziehungen*" gegenüber; und dem neuerdings von POINCARÉ verteidigten Nominalismus, der zeigt, daß diese Beziehungen keine wirkliche, *von den Körpern absolut unabhängige* Bedeutung haben, steht eine genauere Bewertung der als *Teil der Physik* aufgefaßten Geometrie gegenüber.

§ 3. Raum und Räumliches.

Stellen wir uns die Frage „was ist der *Raum?*", und suchen wir sie durch eine angemessene Kritik zu beantworten.

Betrachten wir irgendeinen Körper; sei es z. B. ein Stück Kupfer oder Eisen usw., das sich in Luft oder Wasser oder sonst einem beliebigen umgebenden Medium befinde. Die Kenntnis von diesem Körper erlaubt uns gewisse Empfindungen zu unterscheiden, die sich auf die Materie *innerhalb* oder *außerhalb* desselben beziehen.

Unzählige Fälle, die sich durch die materielle Beschaffenheit des Körpers oder des ihn umgebenden Mediums unterscheiden, zeigen doch etwas Gemeinsames, so daß wir nach *Abstraktion von den besonderen Sinnesqualitäten, die wir dem Kupfer oder dem Eisen,*

der Luft oder dem Wasser zuschreiben, den Begriff einer „*besonderen Art, Materie von Materie zu trennen*“ erhalten, welche den objektiven Gehalt der Begriffe des *festen Körpers* und der *Oberfläche* ausmachen.

Sei nun eine Kugel gegeben, die imstande ist, immer größer zu werden. Man sagt dann, daß, wenn sie *unendlich groß geworden* ist, sie den ganzen *Raum* erfüllt.

Es ist kein Wunder, daß dieser transzendente Prozeß dazu führt, dem Wort „Raum“ einen völlig illusorischen Sinn beizulegen! Da nämlich der Begriff einer Kugel eine Unterscheidung zwischen den Empfindungen, die sich auf das Innere und denen, die sich auf das Äußere beziehen, erfordert, so hat eine unendlich große Kugel, der keine derartige Unterscheidung entspricht, gar keine reale Bedeutung. Daher bleibt der so definierte Raum ein leeres Wort.

Bedarf es der Fortsetzung einer solchen negativen Kritik? Unbezwingbar steigt die Erinnerung auf an die Argumentation des Don Ferrante in den „Verlobten“ von MANZONI, mit der er beweist, daß die Pestansteckung weder Substanz noch Akzidenz sein kann...

Die Untersuchung lehrt aber, daß außer dem transzendenten Sinn des Wortes auch noch eine wirkliche physikalische Bedeutung für die *räumlichen Beziehungen oder die Lagebeziehungen der Körper* übrig bleibt, deren Gesamtheit auch durch das Wort „Raum“ im positiven Sinne bezeichnet werden kann.

Daß in der Tat in diesen Beziehungen eine wirkliche Erkenntnis enthalten ist, geht daraus hervor, daß die Beziehungen der Geradlinigkeit, der Äquidistanz usw. einer festen Übereinstimmung zwischen gewissen Willensakten und den aus ihnen folgenden Empfindungen entsprechen. Ja, es ist nichts genauer und fester als geometrische Voraussagen!

§ 4. Kritik der räumlichen Beziehungen.

Die Annahme des Wortes „Raum" als Bezeichnung für einen unendlich großen Körper ist nicht die einzige, die auf einem transzendenten Definitionsverfahren beruht und deshalb zu einem nominalistischen Schlusse führt. Auch die räumlichen Beziehungen können transzendent aufgefaßt werden, sei es, daß man ihrer *Allgemeinheit* einen *absoluten* Sinn unterlegt, sei es, daß man ihnen eine *unendlich hohe Genauigkeit* zuschreibt, zwei Auffassungen, die übrigens offenbar miteinander zusammenhängen.

Die Allgemeinheit der Geometrie besteht in folgendem: die räumlichen Unterscheidungen *hängen nicht* von der Materie *ab,* von der z. B. unterschieden wird, ob sie innerhalb oder außerhalb einer gegebenen Kugel ist. Nun bedeutet diese Unabhängigkeit aber nur das gleichzeitige Bestehen oder die Möglichkeit solcher Unterscheidungen, die sich auf *andere Stoffe* beziehen, nicht aber eine *absolut allgemeine* physikalische Beziehung, die *dem Raum an sich eigentümlich* wäre, und auch *bei Abwesenheit aller Materie* ihren Sinn behielte.

Der Anspruch, der Geometrie eine Bedeutung zu geben, die von den Körpern absieht, verknüpft sich mit demjenigen, in ihren Beziehungen eine unendlich große oder absolute Genauigkeit zu finden. Denn nachdem einmal diese Deutung der geometrischen Allgemeinheit zurückgewiesen ist, kann die Genauigkeit, die der mathematischen Theorie zukommt, nicht auf die physische Welt angewandt werden, wenn man bedenkt, daß kein wirklicher Gegenstand unter die mathematischen Begriffe des „Punktes", der „Linie", „Oberfläche", „Geraden", „Ebene", „Entfernung" usw. fällt.

Zu der trivialen Feststellung der Nichtexistenz solcher Gegenstände kann man noch hinzufügen, daß in

der physischen Wirklichkeit es nicht einmal möglich ist, sich den erwähnten geometrischen Figuren über eine gewisse Grenze hinaus anzunähern; vor allem gibt es eine von unseren Sinnen abhängige Grenze, die allerdings mit Hilfe geeigneter Instrumente hinausgeschoben zu werden vermag; aber in der Unvollkommenheit derselben entsteht eine neue Grenze, und nicht nur eine praktische, sondern auch eine theoretische; so setzt z. B. die Wellenlänge des Lichtes der Verfeinerung des Gesichtssinnes, auch wenn er mit dem Mikroskop bewaffnet ist, eine unübersteigbare Schranke.

§ 5. Der neue Nominalismus H. POINCARÉS.

Die Unmöglichkeit, den räumlichen Beziehungen einen Sinn beizulegen, der von den Körpern selbst absieht, und die Nichtexistenz wirklicher Objekte, die unter die mathematischen Begriffe des „Punktes", der „Geraden" usw. fallen, werden von H. POINCARÉ[1]) als endgültige Widerlegung des geometrischen Realismus angesehen.

Wenn auch in dem zitierten Werke sich keine Kritik des Raumbegriffes findet, so geht doch der transzendente Sinn, den der Autor den geometrischen Beziehungen beilegt, aus einigen unten angeführten Stücken seiner Schriften klar hervor:

„Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux; aucune d'elles ne porte, ni peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace" (op. cit. pag. 100).

„Direz-vous que si les expériences portent sur les corps, elles portent du moins sur les propriétés géométriques des corps.

1) Vgl. „La Science et l'Hypothèse" Paris Flammarion, ohne Datum.

Et d'abord, qu'entendez-vous par propriétés géométriques des corps? Je suppose qu'il s'âgit des rapports des corps avec l'espace..." (op. cit. pag. 101).

„....il n'existe pas de propriété qui puisse... être un critère absolu permettant de reconnaître la ligne droite et de la distinguer de toute autre ligne.

Dira-t-on par exemple: — 'cette propriété sera la suivante: la ligne droite est une ligne telle qu'une figure dont fait partie cette ligne peut se mouvoir sans que les distances mutuelles de ses points varient et de telle sorte que tous les points de cette ligne restent fixes?' —

Voila en effet une propriété qui ... appartient à la droite et n'appartient qu' à elle. Mais comment reconnaîtra-t-on par expérience si elle appartient à tel ou tel objet concret? Il faudra mesurer des distances, et comment saura-t-on que telle grandeur concrète que j'ai mesurée avec mon instrument matériel représente bien la distance abstraite?" (pag. 94—95).

Aus solchen Überlegungen folgt nun aber lediglich der Schluß, der schon oben ausgesprochen wurde, und der übrigens evident ist: die *reinen* geometrischen Beziehungen sind eine Abstraktion, der nichts Wirkliches entspricht; die elementaren geometrischen Begriffe (Punkt, Gerade usw.) sind gleichfalls eine Abstraktion, der kein Gegenstand genau entspricht. Sie dienen also als *Symbole*, um gewisse Lagebeziehungen der Körper mit Hilfe der geometrischen Sätze auszudrücken.

Wenn sich die Kritik POINCARÉS hierauf beschränkte, wäre sie wirklich unwiderleglich. Aber der berühmte Autor ist weiter gegangen und hat geschlossen, daß die geometrischen Sätze selbst keine wirklichen Tatsachen ausdrücken, sondern als ein *System von bloßen Vereinbarungen* angesehen werden müssen, durch welche die physikalischen Tatsachen dargestellt werden, etwa in derselben Weise, wie man Größen auf ein Maßsystem

bezieht. Das System kann bequem sein, aber nichts verbietet, es zu wechseln. Fragen, ob eine Erscheinung nach einer gewissen geometrischen Hypothese möglich, nach der entgegengesetzten unmöglich sei, hieße ebensoviel wie fragen, ob es Längen gibt, die in Metern ausdrückbar sind, aber nicht in englischen Fuß (vgl. op. cit. p. 93).

Dieser Schluß erscheint uns nicht annehmbar. Denn der Umstand, daß die geometrischen Sätze theoretisch durch Beziehungen zwischen Begriffen ausgedrückt werden, die in ihrer mathematischen Darstellung als Symbole gelten müssen, genügt nicht, um ihnen eine konventionelle Willkür in bezug auf die physische Welt zuzuschreiben, wo diese Symbole eine angenäherte Verwirklichung finden in gewissen Gegenständen, die so durch sie dargestellt werden.

Um Zweifel zu beseitigen, hat POINCARÉ seine Behauptung durch einige geniale und kunstvolle Konstruktionen zu stützen versucht. Es handelt sich darum, physikalische Bedingungen zu erdenken, unter denen *derselbe Raum*, in dem wir leben, *Eigenschaften zu besitzen scheinen würde, die* von denen unserer Geometrie *abweichen.* Dazu genügt es, anzunehmen, daß die Körper bei ihrer Bewegung nach gewissen Gesetzen deformiert würden, z. B. durch eine Temperaturveränderung, *die von ihrer Lage abhinge;* daß das Licht sich nicht geradlinig ausbreitete, sondern dem Einfluß eines brechenden Mediums unterworfen wäre, *das in geeigneter Weise in einem Raumfeld verteilt wäre*, usw. (op. cit. p. 84f.).

Eine genauere Prüfung dieser Beispiele jedoch zeigt, daß die angedeuteten Hypothesen, sofern sie im Hinblick auf die Relativität unserer Erkenntnis positiv gedeutet werden, eine *wirkliche* Veränderung des Raumes einschließen, d. h. der mit diesem Namen bezeichneten Beziehungen.

In unserer Welt sind die Körper meßbar in bezug aufeinander dank der Möglichkeit, sie unabhängig von der Veränderung ihres physikalischen Zustandes zu bewegen; die Erwärmung, die Abkühlung, der Druck verändern allerdings die für die Messung erforderlichen Vergleichselemente, aber diese Veränderung ist zufällig in bezug auf die gegenseitige Lage der Körper; deshalb braucht sich die Geometrie nicht um sie zu kümmern.

In der von POINCARÉ erdachten Welt wäre dagegen die Temperatur eine *geometrische Eigenschaft*, sintemalen jeder Körper (unseren Organismus eingeschlossen) die seiner Stelle entsprechende Temperatur besäße; da es dann aber auch nicht mehr möglich wäre, verschieden warme Körper in Berührung zu bringen und so ihre Dimensionen zu vergleichen, so könnte man nicht mehr sagen, daß „die Körper sich mit wachsender Temperatur ausdehnen". Demnach wäre in der betrachteten Welt die Geometrie *in Wirklichkeit* und nicht nur *scheinbar* von der unsrigen verschieden.

Die entgegengesetzte Behauptung betrachtet die Wirklichkeit als etwas der Erscheinung in einem transzendenten Sinne Gegenüberstehendes. Oder anders ausgedrückt: es widerspricht den Voraussetzungen der Hypothese, wenn man durch eine Erschleichung in jene Welt einen Richter einführt, der nach *unserem* Bilde geschaffen ist und sich den dort geltenden Gesetzen nicht unterwirft!

Eine entsprechende Kritik läßt sich an die Hypothese knüpfen, daß das Licht sich nicht geradlinig bewegt.

Nichts ist von einem abstrakten Gesichtspunkt aus leichter, als eine solche Hypothese anzunehmen! Wird sie nicht in der Tat gemäß den Brechungsgesetzen in jedem beliebigen heterogenen Medium erfüllt?

Aber die Heterogeneität, die durch geeignete physikalische Experimente festgestellt werden kann, ist wiederum etwas für die Erscheinung Zufälliges. Die Bahnen der

Lichtstrahlen können in diesem Falle geändert werden, wenn man die Lage des Mediums selbst im Felde unserer Beobachtung ändert. Was soll dagegen ein heterogenes Medium mit einer festen räumlichen Verteilung bedeuten, etwa ein Äther, von verschiedener Struktur, dessen Teile bei der Bewegung der Körper sich nicht gegeneinander bewegten? Würde man durch diese Hypothese nicht eine von der unsrigen, die wir als *homogen* erkennen, verschiedene *geometrische Welt* schaffen?

Um diese Fragen tiefer zu ergründen, ist es notwendig, sich die physikalische Bedeutung der „geraden Linie" klar zu machen.

Der Begriff der Geraden ergibt sich aus der Untersuchung verschiedenartiger Erscheinungen:

1. aus der der Bewegung *starrer* Körper, bei der die Gerade als *Achse* auftritt, deren Punkte bei einer Rotation unbewegt bleiben (von hier aus dann als gespannter Faden usw.);
2. aus der der Dynamik der *Massenpunkte*, wo die Gerade als *Bahn* eines Punktes erscheint, dessen Bewegung von den umgebenden Körpern nicht beeinflußt wird;
3. aus der der Optik und allgemein der Strahlungserscheinungen, wo die Gerade als *Strahl* oder Symmetrielinie der Erscheinung in einem beliebigen Medium auftritt, das mittels bestimmter vergleichender Experimente als *homogen* erkannt ist.

Prinzipiell dienen die erste und die dritte Eigenschaft dazu, die Gerade in bezug auf unseren Gesichts- und Tastsinn zu definieren, während die zweite vielleicht dazu verwendet werden könnte, sie in bezug auf den Muskelsinn zu definieren.

Nun erlauben diese Definitionen, eine wie die andere, auf sie ein geometrisches System zu gründen; im besonderen kann es eine *(metrische) Geometrie der starren*

Körper und eine *optische* (oder *projektive*) *Geometrie* geben.

Die Übereinstimmung dieser verschiedenen Arten, die Gerade zu definieren, ist eine Grundtatsache, die uns erlaubt, diese verschiedenen Erscheinungen unter eine *einzige geometrische Darstellung* zu subsummieren. Auf diese lassen sich dann auch noch andere bekannte Erscheinungen und speziell die dynamischen zurückführen.

Die Grundlage dieser Darstellung ist der Umstand, daß gewisse Bedingungen der Homogeneität des Mediums zu einer *Symmetrie der Erscheinungen* in bezug auf gewisse Linien führen; in einer solchen Abhängigkeitsbeziehung besteht der eigentliche physikalische Sinn der *Homogeneität des Raumes.*

Nichts hindert uns, uns vorzustellen, daß die vielfältigen Übereinstimmungen, deren Gesamtheit die besagte Symmetrie ausmacht, nicht wirklich bestehen, wenn man die Tatsachen durch genauere Experimente untersucht; aber in einem solchen Falle würde es sich um etwas ganz anderes als um eine einfache Verbesserung der Theorie des Lichtes handeln; denn die Gesamtheit der Tatsachen, die durch die *Hypothese der Geraden* bezeichnet werden, würde dadurch bei dieser Stufe der Approximation als falsch erwiesen sein.

§ 6. Die Geometrie als Teil der Physik.

Die Philosophen, die durch eine transzendente Auffassung der Geometrie zum Nominalismus geführt werden, fallen offenbar einer fundamentalen Illusion zum Opfer, die daher kommt, daß sie die Erkenntnisse in ihrem *augenblicklichen* Zustand als etwas *Fertiges* betrachten, ohne sich um ihre *Entstehung* zu bekümmern.

Das ist die Ansicht von der Wissenschaft, die Kant aus dem System Newtons abstrahiert hat; das wissen-

schaftliche System, in dem die komplizierteren Beziehungen den einfacheren untergeordnet sind, wird von ihm in einem absoluten erkenntnistheoretischen Sinne aufgefaßt.

So verwandelt sich im besonderen der Umstand, daß in einer dogmatischen Darstellung die Geometrie der Mechanik und der Physik *vorhergeht*, und daß die geometrischen Erkenntnisse der experimentellen Methode der physikalischen Forschung zugrunde liegen, in die Beziehung einer notwendigen Abhängigkeit, die ihren Ausdruck in dem KANTischen „a priori" findet. Und indem man von der Kritik der wissenschaftlichen Erkenntnis zu der der vulgären aufsteigt, wird die Anschauung der räumlichen Beziehungen, die die Assoziationen unserer aktuellen Empfindungen (des Gesichts- und des Tastsinns) beherrscht, als a priori in bezug auf diese Empfindungen angesehen; und abgesondert von den Sinnesdaten (die man sich willkürlich als in Raum und Zeit isolierte einfache Elemente vorstellt), wird die räumliche Ordnung als ein *Rahmen* aufgefaßt, den der Geist hinzufügt und in dem sie ihre Stelle finden.

Nun ist aber diese ganze erkenntnistheoretische Konstruktion überwunden durch eine adäquatere Einsicht in die *Entwickelung* der Erkenntnisse, die die sicherste Errungenschaft der evolutionistischen Philosophie bildet.

Die allgemeine Tatsache, daß die Erfahrung mit Hilfe früherer Erkenntnisse gedeutet wird, und daß jede Phase des wissenschaftlichen Fortschritts in analoger Weise von einer früheren abhängt, wird heute in einem anderen Sinne verstanden; man stellt nicht mehr eine absolute Rangordnung der Wissenschaften auf, sondern man erkennt die Entwickelungsstufe einer jeden an, vermöge deren gewisse einfachere oder einer genaueren Definition fähige Begriffe sich aus der Masse

der empirischen Daten herausheben, so daß sie schließlich ein verhältnismäßig selbständiges Ganzes von Theorien bilden.

Demnach wird die Geometrie anstatt als der Physik vorangehend als ein Teil derselben angesehen, der allerdings einen hohen Grad der Vollkommenheit erreicht hat, vermöge der Einfachheit, der Allgemeinheit und der relativen Unabhängigkeit der in ihr enthaltenen Beziehungen.

Wenn nun die geometrischen Sätze physikalisch aufgefaßt werden, so ergibt sich, daß die konkreten Voraussagen, die sie enthalten, an Tatsachenelemente gebunden sind, die gewöhnlich nicht für geometrisch angesehen werden. Dadurch erscheinen die Lehrsätze der theoretischen Geometrie lediglich als symbolischer Ausdruck der unvollständig ausgedrückten physikalischen Beziehungen, die bei den konkreten Anwendungen näher bestimmt werden.

Infolgedessen weist die genaue Form der Sätze einen Grad der Genauigkeit auf, der dadurch noch weiter getrieben werden kann, daß man die *Gleichungen* in *Ungleichungen* verwandelt, wie aus dem folgenden Beispiel hervorgeht.

Nehmen wir den Satz: „Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich."

In der Wirklichkeit existieren Gegenstände, die mit einer gewissen Annäherung unter den Begriff des Dreiecks subsumiert werden können *(physische Dreiecke)*.

Konstruieren wir ein solches Modell aus drei dünnen Eisenstäben und einer Zeichnung auf dem Papier! Messen wir mit dem Maßstab zwei Seiten und mit dem Winkelmaß die beiden gegenüberliegenden Winkel!

Das wahre Maß einer Seite wird durch zwei Zahlen dargestellt, deren Differenz (sei sie 0,0001 m) von der

Vollkommenheit des Instrumentes abhängt; man wird das ausdrücken, indem man z. B. sagt, daß die Länge der Seite 3,4576 m mit einem Fehler von weniger als einem Zehntel Millimeter beträgt, d. h. daß sie zwischen 3,4576 m und 3,4577 m liegt.

Wenn die Maßzahl der beiden in Frage stehenden Seiten des Dreiecks in dem angegebenen Sinne die Zahl 3,4576 ist, so gilt das Dreieck als „gleichschenklig"; unsere Voraussetzung ist also, daß „die beiden Seiten sich um weniger als 0,0001 m unterscheiden".

Nun wird uns die Größe der beiden den erwähnten Seiten gegenüberliegenden Winkel durch das Winkelmaß gegeben.

Das ausgesprochene Theorem sagt uns, daß die Differenz zwischen den beiden Winkeln sehr klein sein wird, und daß daher ihre Maße mit einer Annäherung gleich sein werden, die von derjenigen abhängt, in der die (auf die Seiten bezügliche) Voraussetzung erfüllt ist.

Aber das ist nur eine unbestimmte Angabe.

Wenn man die genaue Bedeutung des Satzes in der Wirklichkeit haben will, so muß man ihn folgendermaßen umformen:

„Wenn zwei Seiten eines Dreiecks sich um weniger als eine gewisse Länge ε unterscheiden, so unterscheiden sich die beiden gegenüberliegenden Winkel um weniger als eine Größe τ, die von ε nach einem gewissen Gesetze abhängt." Und man muß daher den Satz ergänzen, indem man eine Funktion $f(\varepsilon)$ von der Beschaffenheit findet, daß für ε unterhalb einer gewissen Grenze, $\tau < f(\varepsilon)$[1].

---

1) Auf derartige Fragen, die die Geometrie als physikalische Wissenschaft betreffen, hat F. KLEIN die Aufmerksamkeit gelenkt in seinen schönen Vorlesungen aus dem Sommer 1901. (Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Leipzig, B. G. Teubner. 1902.)

Durch eine leichte Rechnung findet man (wenn τ in Graden ausgedrückt wird)

$$\tau < 61 \frac{\varepsilon}{a},$$

wo a mit einem Fehler, der kleiner als ε ist, die Länge der merklich gleichen Seiten unseres Dreiecks ausdrückt; in unserem Falle

$$(\varepsilon < 0{,}0001, \quad a > 3)$$

ergibt sich

$$\tau < 1.$$

Wenn man in dem erläuterten Sinne die Lehrsätze der Geometrie aus Gleichungen in Ungleichungen verwandelt, so erkennt man, daß sie einen Teil der Lagebeziehungen zwischen den Körpern darstellen; das, was man bei den verschiedenen konkreten Anwendungen hinzufügen muß, bezieht sich auf die Natur dieser Körper selbst (auf die Wärme, auf die Kräfte, die auf sie wirken, usw.) und wird als der theoretischen Geometrie fremd angesehen.

Wenn auch die Unterscheidung zwischen Theorie und Anwendung nur durch Vereinbarung eingeführt ist, um das Verständnis der Wirklichkeit zu erleichtern, so ist diese Erleichterung doch nur möglich vermöge einer *statistischen Regelmäßigkeit*, die sich der *Unregelmäßigkeit der Erscheinungen* superponiert und die sich durch die Annahme allgemeiner und genauer geometrischer Tatsachen erklären läßt, die sich auf hypothetische einfache Bedingungen beziehen.

§ 7. Über die Genauigkeit der Geometrie.

Wir wollen versuchen, diese Betrachtung zu erklären und zu vertiefen im Hinblick auf eine Abschätzung der *Genauigkeit* der Geometrie.

Die *direkte* Verifikation einer geometrischen Eigenschaft kann in jedem einzelnen Falle einen gewissen

Grad der Approximation nicht überschreiten. Derselbe kann a priori in Beziehung gesetzt werden zu der Grenze, die wir bereits für die Verwirklichung geometrischer Begriffe erkannt haben. Wenn aber die in Frage stehende Eigenschaft als eine Hypothese betrachet wird, die von einfachen theoretischen Bedingungen abhängt, so bieten sich für die Verifikation so viele indirekte Wege, daß ihrer Genauigkeit a priori gar keine Grenze mehr gesetzt werden kann.

In diesem Sinne erscheint die Geometrie als ein System von *allgemeinen Voraussetzungen*, deren Bedeutung in den *Tatsachen* liegt, die sich aus ihnen ableiten lassen, und die daher von einer unbegrenzt fortsetzbaren Reihe von Experimenten abhängt.

So haben wir die Existenz der geraden Linie gedeutet als die Annahme einer allgemeinen Symmetrie in den Erscheinungen, an die sich Verifikationen der Eigenschaften der Geraden knüpfen können, die viel genauer sind als diejenige, die unmittelbar durch die Eigenschaften der Rotationsachsen der starren Körper geliefert wird.

Dieser Punkt bedarf der Feststellung: die indirekten Verifikationen, die sich an die Annahme einer geometrischen Beziehung knüpfen, haben einen Sinn trotz der Unmöglichkeit (mit der erforderlichen Approximation) die einfachen Bedingungen zu realisieren, von denen die Beziehung selbst abhängt.

Das erhellt vor allem deutlich aus der statistischen Betrachtung, die wir oben angestellt haben. Die geometrische Hypothese leugnen heißt eine *systematische* Fehlerquelle annehmen, die sich den verschiedenen realen Bedingungen superponiert und so in einer großen Anzahl von Verifikationen als von den *zufälligen* Unregelmäßigkeiten verschieden zum Vorschein kommen kann.

Um ein schon früher betrachtetes Beispiel heranzuziehen, so kann die Unvollkommenheit der Modelle

und die Ungenauigkeit unserer Messungen einen Fehler in der Verifikation des Satzes, daß die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck gleich sind, bewirken, aber in einer großen Zahl von auf diesem Satze beruhenden graphischen Konstruktionen haben die Fehler die Tendenz sich auszugleichen. In diesem Sinne ist es klar, daß die Ungenauigkeit der *Anwendung* die Genauigkeit des *Satzes* nicht erschüttert.

Man versuche jedoch mehrmals eine angenäherte Konstruktion, z. B. die von Specht für die Rektifikation des Zirkels, in einer Reihe von Zeichnungen auszuführen; in diesem Falle kommt eine systematische Fehlerquelle hinein, die bei einer großen Anzahl von Versuchen immer *merkbarer* werden wird.

Die *Genauigkeit der Geometrie* erhält nun also eine genau bestimmte Bedeutung: sie ist eine in jedem Moment des wissenschaftlichen Fortschritts durch die gemachten Erfahrungen *bis zu einem gewissen Grade* verifizierte Hypothese, die die Ergebnisse anderer möglicher Versuche vorwegnimmt. Und es ist klar, daß diese Hypothese niemals endgültig bewiesen werden kann, da die Reihe der möglichen Versuche unbegrenzt ist. Nichts hindert jedoch, daß sie *widerlegt* wird.

Jedenfalls gelingt es nicht, den hier sich erhebenden Zweifel anders zu beheben, als indem man zeigt, daß man eine entgegengesetzte Hypothese aufstellen kann, die nicht weniger bestimmt und widerspruchsfrei ist als die gewöhnliche Geometrie.

Dieser Beweis nun wurde durch die Konstruktion der nichteuklidischen Geometrie geliefert, welche zeigte, daß man, ohne den Tatsachen, auf denen die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe beruhen, zu widersprechen, Hypothesen aufstellen kann, die mit der Genauigkeit der gewöhnlichen Geometrie unvereinbar sind, die sich aber in *einer wirklichen und eigentlichen*

von der unsrigen verschiedenen Geometrie ausdrücken lassen.

§ 8. Der Raum als Begriff: die abstrakte Geometrie.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, wollen wir mit der folgenden Betrachtung beginnen.

Der Raum, betrachtet im Geiste des Geometers, ist nicht nur eine Anschauung, durch die die sinnlichen Bilder geordnet werden, sondern auch ein *Begriff*, wie dies die Geometer seit LEIBNIZ zu versichern nicht aufgehört haben.

Es war ein Fehler der KANTischen Kritik, diese psychologische Bedeutung des Wortes „Raum" übersehen zu haben, die die Geometrie nicht entbehren kann, wenn sie die logische Form einer deduktiven Wissenschaft beibehalten will.

Vergebens erwidert man, daß ein Begriff mehrere mögliche Bestimmungen voraussetzt, von denen der Raum einer besonderen entspräche. Diejenigen, die diesem alten Argument noch irgendeinen Wert beimessen, scheinen die abstrakte logische Bedeutung nicht zu kennen, die der Raum bei den zeitgenössischen Geometern erhalten hat.

Der Begriff des Raumes in seiner mathematischen Fassung stellt die Gesamtheit der (geometrischen) Beziehungen zwischen den *Punkten* dar, abgesehen von den besonderen Empfindungen, die sich an das Bild des Punktes knüpfen. Der Raum wird dabei gedacht als eine *Mannigfaltigkeit von irgend welchen Elementen*, denen der *Name* „Punkte" gegeben wird, weil sie in gewissen Ordnungsbeziehungen stehen, die geeignet sind, mit großer Annäherung die Lagebeziehungen darzustellen, die zwischen sehr kleinen Körpern *(physischen Punkten)* stattfinden.

Wir hatten schon Gelegenheit, daran zu erinnern, daß PLÜCKER gelehrt hat, aus dieser Unbestimmtheit, die dem als „Punkt" bezeichneten Gegenstand anhaftet, Nutzen zu ziehen, indem man unter dem Namen Raum sehr verschiedene geometrische Formen studiert.

Man bezeichnet z. B. als „Punkte" die „Kreise" einer Ebene und setzt in geeigneter Weise fest, was man unter der „Entfernung" zweier Kreise verstehen will, welche Systeme von Kreisen man als „Gerade" bezeichnen will und welche als „Ebenen". Diese Definitionen müssen so geschehen, daß die elementaren geometrischen Eigenschaften des gewöhnlichen Raums (Postulate) in Sätze übergehen, die für die Kreisgeometrie gelten.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so wird dadurch eine Zuordnung hergestellt zwischen dem gewöhnlichen Punktraum und dem Kreisraum; jeder Punktfigur entspricht eine *Kreisfigur* und jedem Satz über die eine gemäß der bestehenden *Dualität* ein solcher über die andere.

Wenn man das PLÜCKERsche Prinzip auch auf die angewandte Geometrie überträgt, so erscheint es natürlich, dem physikalischen Raum auch Mannigfaltigkeiten von Elementen entsprechen zu lassen, in denen die Eigenschaften, die die Übersetzung der geometrischen Postulate ausdrücken, nur teilweise vorhanden sind.

Dadurch entsteht eine Reihe von *abstrakten Räumen*, in denen *verschiedene Geometrien* gelten, die jedoch alle auf einer gemeinsamen Grundlage aufgebaut sind.

Man konstruiert z. B. eine Reihe von nichteuklidischen Räumen, in denen das Parallelenpostulat nicht erfüllt ist. Und diese Reihe, die von dem Werte einer Konstanten abhängt, die mit einem ungeeigneten Namen *Krümmungsmaß* genannt wird, fällt unter den Begriff eines Raumes, der allgemeiner ist als der gewöhnliche.

Durch eine weitere Verallgemeinerung kann man unter diesem Begriff die Reihe der *mehrdimensionalen Räume* begreifen oder andere noch weiter von dem physikalischen Raum abliegende Mannigfaltigkeiten.

Man darf diesem Verallgemeinerungsprozeß keine Grenze setzen, da er nur von einer *Verabredung* abhängt, die der Mathematiker im Interesse seiner Studien zu treffen für nützlich erachtet.

Die Theorie der abstrakten Räume ist ein wesentlicher Teil des im verflossenen Jahrhundert aufgeführten geometrischen Gebäudes!

Indem wir auf die Betrachtung dessen verzichten, was sie uns im Gebiete der mathematischen Analysis gelehrt hat, wollen wir vielmehr untersuchen, was für ein Interesse sie für den Philosophen haben kann.

Das Interesse ist ein doppeltes, einmal bezieht es sich auf die Frage des physikalischen Raums, anderseits betrifft es den Ursprung und die Entwickelung unserer geometrischen Kenntnisse.

§ 9. Historische Bemerkungen über die Entstehung der nichteuklidischen Geometrie.

Seit der Zeit des Euklid bis zum Anfange des verflossenen Jahrhunderts wurde allgemein angenommen, daß wir im Begriff des Raumes, wie er durch die Postulate der griechischen Geometrie definiert wird, eine vollkommen genaue Darstellung der physikalischen Lagebeziehungen besitzen.

Ein Zweifel an dieser Genauigkeit mußte jedem als Tollheit erscheinen, solange diese Darstellung als die *einzig mögliche* angesehen wurde. Es ist daher keine allzukühne Annahme, daß auch das größte Genie nicht auf den Gedanken einer so kühnen Kritik gekommen wäre, wenn man nicht durch einen Mangel im logischen

Aufbau der euklidischen Geometrie darauf geführt worden wäre.

Da man damals glaubte, daß die Grundsätze der Geometrie den Charakter von notwendigen Axiomen hätten, wie die logischen, und daß sie ihrer Natur nach von diesen nicht verschieden wären, so konnte man sich schwer entschließen, diesen den weniger evidenten Satz beizugesellen, der in dem fünften euklidischen Postulat über die Parallelen ausgesprochen ist.

Es ist nötig, sich an dieser Stelle daran zu erinnern, was dieses Postulat fordert und welches der Inhalt der Voraussetzungen ist, auf denen die euklidische Geometrie beruht.

Nach der Auffassung EUKLIDS beruht die Geometrie auf Definitionen, Axiomen und Postulaten. Diese letzteren fordern die Möglichkeit gewisser elementarer Operationen und haben den Zweck, die *Existenz* der geometrischen Grundelemente zu sichern, gemäß der Rolle, die die Griechen der geometrischen Konstruktion zuschrieben (ZEUTHEN).

Aber in Wirklichkeit sind noch andere Hypothesen, die von den logischen Axiomen klar unterschieden sind, versteckterweise sowohl in den Definitionen als in den Axiomen des EUKLID enthalten. Und die moderne Kritik, die die geometrischen Grundbegriffe nicht definiert, spricht sie gleichfalls unter dem Namen von *Postulaten* aus (Kap. III).

Es gibt verschiedene Arten, die für die euklidische Geometrie notwendigen Voraussetzungen auszusprechen und anzuordnen[1]). Es sei uns gestattet, uns auf die Anordnung in unserer Sammlung „Questioni riguardanti la Geometria elementare"[2]) zu beziehen, die überein-

1) Vgl. unseren S. 165 zitierten Artikel über die Prinzipien.

2) Bologna, ZANICHELLI 1900.

stimmt mit unseren pädagogischen Anweisungen in den „Elementi di Geometria“[1]), die wir zusammen mit U. Amaldi herausgegeben haben; denn dort wird das, was der Hypothese über die Parallelen vorangeht, in geeigneter Weise ins Licht gesetzt.

Wir wollen also die Voraussetzungen aufzählen, die betreffen:

1. die Postulate, die sich auf die Bestimmung von Geraden und Ebenen und ihre wechselseitige Zugehörigkeit beziehen;
2. die Grundeigenschaften der *geraden Linie* als System von Punkten (*natürliche Ordnungen, Abschnitte* usw.)[2]);
3. die Eigenschaften der *Ebene* in bezug auf ihre Geraden (Teilung, Winkel);
4. die Teilung des Raums in bezug auf eine Ebene;
5. die Möglichkeit der *Bewegungen*, d. h. die Prinzipien der *Kongruenz* der Figuren (aus denen die Sätze über die Kongruenz und Inhaltsgleichheit von Dreiecken usw. folgen).
6. das Parallelenpostulat (fünftes euklidisches Postulat):

Wenn zwei Geraden in einer Ebene von einer dritten so geschnitten werden, daß die Summe der mit ihr gebildeten konjugierten Winkel auf einer Seite weniger als zwei Rechte beträgt, so schneiden sich die beiden Geraden auf dieser Seite.

Auf dieses Postulat (das man auch ersetzen kann durch die Aussage, daß durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele existiert, usw.)

---

1) Bologna, Zanichelli 1903; 2. Aufl. 1905.

2) Unter diesen Eigenschaften kommt die Stetigkeit der Geraden vor. Diese erscheint nicht bei Euklid, sondern dort wird sie an einigen Stellen durch besondere Sätze ersetzt, die von ihr abhängen. Man vergleiche den Artikel IV von G. Vitali in der Sammlung von F. Enriques „Questioni ...“ op. cit.

beziehen sich unzählige Beweisversuche, angefangen von den ersten Kommentatoren des EUKLID (PROKLUS, NASIR EDDIN ...) bis auf LEGENDRE.

Aber alle vorgeschlagenen Beweise beruhen entweder ausdrücklich oder versteckterweise auf irgendeinem anderen Satz, der dem fünften euklidischen Postulat äquivalent ist und nicht in dem Bereich derjenigen geometrischen Eigenschaften enthalten ist, die auf den Hypothesen 1.—5. beruhen.

Ohne näher auf die Geschichte dieser Versuche einzugehen, genügt es und ist es auch notwendig, sich wenige Namen und Daten gegenwärtig zu halten, die enger mit der Erfindung der nichteuklidischen Geometrie verbunden sind[1]).

JOHN WALLIS (1663) hat entdeckt, daß das Parallelenpostulat eine unentbehrliche Grundlage für die Theorie der Ähnlichkeit ist, so daß der Beweis dieses Prinzips aus der Annahme der Existenz ähnlicher Dreiecke hergeleitet werden kann.

GIROLAMO SACCHERI geht in seinem „Euclides ab omni naevo vindicatus ...“ (1733) von der Konstruktion eines Vierecks mit drei rechten Winkeln aus und unterscheidet drei Fälle, die unter Berücksichtigung der Eigenschaften 1.—5. für den vierten Winkel a priori als möglich erscheinen: er kann ein rechter, ein stumpfer und ein spitzer sein. Er beweist, daß jeder der Fälle unter den angegebenen Bedingungen für *jedes* Viereck stattfinden müßte, wenn er für ein bestimmtes zutrifft.

Er stellt daher für die drei Fälle die Grundeigenschaft zweier Geraden einer Ebene, die auf einer dritten senkrecht stehen, fest:

---

1) Über ihre Geschichte und eine gedrängte Darstellung der sie bildenden Theorien s. den Art. VI von R. BONOLA in unserer zitierten Sammlung.

im ersten wären sie überall gleich weit entfernt (woraus das euklidische Parallelenpostulat folgt);

im zweiten Falle würden sie sich vom gemeinsamen Lot an *einander nähern;*

im dritten sich voneinander *entfernen.*

Der Fall des stumpfen Winkels wird daher von SACCHERI als der *Unendlichkeit der Geraden* widersprechend ausgeschaltet. Gegen die Annahme des stumpfen Winkels führt er falsche Argumente an; aber er war a priori überzeugt, daß dieser Fall sich als unmöglich erweisen lassen müßte!

Dieser Irrtum, mit dem das Werk SACCHERIS schließt, hebt den Wert der Ergebnisse, zu denen er gelangt, und die wir oben aufgeführt haben, nicht auf. Dazu kommt folgendes:

Wenn der Fall des stumpfen Winkels zutrifft, ist die Summe der Winkel in einem beliebigen Dreieck immer größer als zwei Rechte; im Falle des spitzen Winkels dagegen ist sie kleiner als zwei Rechte. Wenn in einem einzigen Dreieck die Summe der Winkel gleich zwei Rechten ist, so ist dasselbe in jedem anderen Dreieck der Fall und die euklidische Annahme trifft zu.

Dieser letztere Schluß ist ein Jahrhundert später von LEGENDRE am Schluß seiner langen Untersuchungen über die Theorie der Parallelen wiedergefunden worden.

J. H. LAMBERT diskutiert in seiner „Theorie der Parallellinien", die im Jahre 1786 veröffentlicht, aber, wie es scheint, schon zwanzig Jahre vorher geschrieben wurde, von neuem die drei Fälle SACCHERIS, dessen Arbeit, nach einer plausiblen Annahme SEGRES, ihm bekannt sein konnte. Er kommt zu dem Schluß, daß der Fall des spitzen Winkels nicht so leicht ausgeschlossen werden könne, wie der andere, der der Unendlichkeit der Geraden widerspricht.

Indem wir das Werk von F. C. SCHWEIKART und F. A. TAURINUS, die die historische Kritik von ENGEL und STÄCKEL unter die nächsten Vorläufer der nichteuklidischen Geometrie eingereiht hat, übergehen, können wir sagen, daß ihre endgültige Aufstellung GAUSS, LOBATSCHEWSKY und BOLYAI zu verdanken ist.

Die Untersuchungen des ersteren, die zwischen 1792 und 1797 begannen und bis 1832 fortgesetzt wurden, sind uns erst durch Briefe des großen Geometers bekannt geworden.

Das Werk LOBATSCHEWSKYS ist in den Veröffentlichungen enthalten, die im Jahre 1826 in den Kasaner Berichten begannen, während die erste Publikation seines ungarischen Kollegen über diesen Gegenstand auf das Jahr 1829 zurückgeht.

Von LOBATSCHEWSKY und BOLYAI wurden ohne weiteres die Folgerungen aus der dritten Annahme SACCHERIS gezogen, nach der zwei in einer Ebene liegende Gerade, die auf einer dritten senkrecht stehen, divergieren; diese Folgerungen bilden nun ein zusammenhängendes abstraktes geometrisches System, das von GAUSS als „nichteuklidische Geometrie" bezeichnet wurde.

Daraus ergab sich dann der Beweis der *Unmöglichkeit, das Parallelenpostulat* EUKLIDS dadurch *zu beweisen*, daß man es aus den oben angegebenen Voraussetzungen ableitet.

Dieser Beweis wird implizite geliefert durch die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie, wie sie LOBATSCHEWSKY und BOLYAI angegeben haben. Immerhin gelang es den erwähnten Geometern nicht, diesen Beweis so streng zu machen, daß die Möglichkeit ausgeschlossen wurde, jemals im weiteren Verlaufe der nichteuklidischen Geometrie auf einen Widerspruch zu stoßen. Und selbst GAUSS, der für sich die Hauptsätze dieser Geometrie schon lange gefunden hatte, scheint sich von

ihrer logischen Möglichkeit erst gegen 1830 überzeugt zu haben.

Diese Einzelheiten haben heute nur ein historisches Interesse. Die logische Möglichkeit der nichteuklidischen Geometrie und damit die Unbeweisbarkeit des gewöhnlichen Parallelenpostulats (im angegebenen Sinne) steht heute außer Frage.

Man hat weiter erkannt, daß auch noch eine *andere* Geometrie möglich ist, bei der aus den Voraussetzungen 1.—5. die Annahme der Unendlichkeit der Geraden fortgelassen wird (indem man die Gerade als eine *geschlossene Linie* ansieht); man erhält dann ein abstraktes geometrisches System, das den Namen RIEMANNS bekommen hat, und das ebenso widerspruchsfrei ist wie die LOBATSCHEWSKYsche Geometrie. Während diese Geometrie dem von SACCHERI betrachteten Fall des spitzen Winkels entspricht, entspricht die RIEMANNsche Geometrie dem Fall des stumpfen Winkels.

Doch wir können die Aufzählung der Erfolge, die die mathematische Wissenschaft auf diesem Gebiete errungen hat, nicht weiter verfolgen; wir unterlassen es deshalb, zu erzählen, welche Beiträge Mathematiker wie HELMHOLTZ, BELTRAMI, CAYLEY, KLEIN, CLIFFORD, LIE, POINCARÉ, VERONESE, HILBERT zu diesen Untersuchungen geliefert haben[1]).

Wir werden im folgenden z. T. darauf zu sprechen kommen. Jetzt wollen wir den Begründern der nichteuklidischen Geometrie zu den philosophischen Erwägungen folgen, die durch ihre Entdeckung veranlaßt wurden.

§ 10. Das Problem des Raumes.

Es ist eine eigentümliche Eigenschaft des menschlichen Geistes, in der wirklichen Welt die konkreten

1) Vgl. unseren zitierten Artikel über die Prinzipien.

Vorbilder seiner Schöpfungen zu suchen. Diese Neigung schleicht sich fast unbemerkt bei solchen Menschen ein, deren Geist nicht durch abstrakte Studien erzogen ist, weil die Begriffe, die sie bilden, aus Assoziationen hervorgehen, die durch Sinneswahrnehmungen veranlaßt sind, und sich deshalb von vornherein als Vorstellungen von wirklichen Gegenständen darstellen. Immerhin ist auch in diesem Falle der Prozeß, der die experimentelle Beobachtung verallgemeinert, ein Abstraktionsprozeß, durch den ein Begriff entsteht, dem man die neuen Beobachtungen unmittelbar unterzuordnen strebt.

Wenn es sich aber um Menschen handelt, deren Geist durch die abstrakten Wissenschaften gebildet ist, so entfernt sich der Prozeß der Begriffsbildung immer mehr von den durch die Wahrnehmung hervorgerufenen Assoziationen, und die daraus hervorgehende Schöpfung erscheint daher gänzlich abseits von aller Wirklichkeit; daher erweist sich das Bestreben, das Abstrakte zu objektivieren, als eine Eigentümlichkeit jener anderen Geister.

Wenn jemand dies für einen tadelnswerten Mangel der mathematischen Geister erklärt, so kann man wohl sagen, daß seine Prüfung die Oberfläche der Frage nicht durchdrungen hat!

Der Fehler der mathematischen Begabung bei ihren kleineren Repräsentanten ist nämlich gerade das Gegenteil; er besteht darin, nicht zu begreifen, daß ein Denken, das sich mit abstrakten Konstruktionen begnügt, ohne die wenn auch unbestimmte Hoffnung, darin die Form irgendeiner Wirklichkeit zu finden, ein unfruchtbares dialektisches Instrument wäre.

„Jeder wie auch immer definierte Begriff ist die *mögliche* Vorstellung einer Wirklichkeit", das ist die leitende Maxime derjenigen, die mit dem Abstraktionsvermögen ein hohes Bewußtsein von dem wissenschaftlichen Zweck verbinden, zu dem es angewandt wird.

Und man kann denjenigen nicht tadeln, der hinter den idealen Konstruktionen, die sich von den Daten der unmittelbaren Wahrnehmung entfernen, jene *mögliche* Realität sucht; mit demselben Rechte könnte man das Genie für die Kühnheit der Hypothesen tadeln, mit denen es den den Alltagshorizont begrenzenden Nebel zu durchdringen sucht.

Diese Kühnheit wäre nur dann tadelnswert, wenn die nur mögliche Hypothese ohne ausreichende Verifikation als wahr oder wahrscheinlich angesehen würde oder sonst auf irgendeine Weise die Tatsachen verdunkelte, die sich als ihr widersprechend erweisen.

Die Begründer der nichteuklidischen Geometrie waren sicherlich kühn, indem sie ihren abstrakten Entwickelungen die Bedeutung von wirklichen Hypothesen zuschrieben; aber sie verdienen, wie wir sehen werden, nicht den oben erwähnten Tadel. Mathematiker und Philosophen zugleich, stellten sie sich eine Frage, die den glänzendsten Triumph des kritischen Geistes bedeutet; und als Philosophen waren sie Positivisten im besten Sinne, indem sie die Antwort auf ihre Zweifel in den Tatsachen suchten und indem sie diese ohne Vorurteil prüften.

Während KANT sich bemühte, den psychologischen Charakter der Raumanschauung zu beweisen und ihren physikalischen Sinn zu zerstören, wandte GAUSS seine Aufmerksamkeit der genauesten Ausmessung der Winkel des geodätischen Dreiecks: Brocken, Hoher Hagen, Inselsberg zu[1]), um aus ihr innerhalb der auf der Erde in Betracht kommenden Genauigkeitsgrenzen eine experimentelle Bestätigung der Geometrie zu entnehmen;

---

1) Von diesem Dreieck, dessen Seiten 69, 85, 197 km lang sind, spricht GAUSS im § 28 seiner „Disquisitiones circa superficies curvas“.

und LOBATSCHEWSKY befragte die Parallaxen der entfernten Sterne, ob bei solchen Größenordnungen die gewöhnliche Parallelentheorie noch gültig bleibt oder ob man sie durch eine nichteuklidische ersetzen muß, woran schon SCHWEIKART gedacht hatte, indem er dieser Geometrie den Namen der „astralen“ gab.

Wir wollen versuchen, die Bedeutung solcher Experimente festzustellen.

Nach dem, was wir gesagt haben, kann die Frage der Parallelen *theoretisch* durch Ausmessung eines einzigen Dreiecks entschieden werden: wenn in diesem die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist, so gilt die Annahme EUKLIDS, ist sie kleiner, die LOBATSCHEWSKYS, ist sie größer, die RIEMANNS. Wenn man in den beiden letzten Fällen mit α die Differenz zwischen der Winkelsumme und zwei Rechten bezeichnet (die im RIEMANNschen Fall positiv ist) und mit A den Inhalt des Dreiecks, so kann man bzw. setzen

$$\frac{\alpha}{A} = -\frac{4}{\pi k^2},$$

oder

$$\frac{\alpha}{A} = +\frac{4}{\pi k^2},$$

und man kann dann zeigen, daß der Wert von k von dem besonderen Dreieck unabhängig ist.

Die Konstante $\frac{\alpha}{A}$ erhält die Bezeichnung *Krümmungsmaß* (wegen gewisser Analogien mit der Flächentheorie); sie wird $= 0$ bei der euklidischen Hypothese, die man als Grenzfall der anderen für $k = \infty$ erhält.

Es ergibt sich demnach, daß das Parallelenproblem *physikalisch* nur dadurch gelöst werden kann, daß man durch genaue Messungen beweist, daß in irgendeinem Dreieck die Winkelsumme *merklich* kleiner oder größer als zwei Rechte ist. Findet man aber diese Summe merklich gleich zwei Rechten, so bleiben zwei Fälle möglich:

a) die euklidische Geometrie gilt physikalisch für beliebig genaue Messungen;
b) es gilt eine der beiden nichteuklidischen Geometrien, aber das (positive oder negative) Krümmungsmaß des Raumes ist sehr klein und folglich der LOBATSCHEWSKYsche Parameter k sehr groß, nämlich um so größer, je weniger die Winkelsumme unserer Dreiecke von zwei Rechten abweicht, abgesehen von den Beobachtungsfehlern.

Nun ergeben die genauesten Messungen an irdischen Dreiecken, wie dem von GAUSS gemessenen innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit, eine Bestätigung der euklidischen Geometrie. Daraus geht hervor, daß k in bezug auf irdische Dimensionen eine gewisse Grenze überschreitet.

Wenden wir uns zur Astronomie. Hier findet man Dreiecke von Dimensionen, die im Vergleich zu den auf der Erde beobachteten ungeheuer sind; da der Nenner des Bruches

$$\frac{4}{\pi k^2}$$

viel größer ist, so kann man hoffen, die Größe α zu messen, obgleich k die oben erwähnte Grenze überschreitet. Allerdings können wir bei himmlischen Dreiecken nicht mehr die *drei* Winkel messen, deren Summe um α von zwei Rechten abweichen soll, sondern nur *zwei* von ihnen. Betrachtet man z. B. einen Stern von zwei gegenüberliegenden Punkten der Erdbahn, etwa von den beiden Enden der großen Achse der Ekliptik, so kann man nicht den Winkel x messen, unter dem man diese Achse von dem Stern aus sehen würde, sondern nur die beiden Winkel a, b, die von den nach dem Stern hinlaufenden Sehstrahlen mit ihr gebildet werden.

Nach der euklidischen Annahme hat man

$$a + b + x = 2\,\mathrm{R}$$

und folglich wird der Winkel x durch die *Parallaxe* des Sterns $2R - (a - b)$ gegeben, die gewöhnlich für den Fall bestimmt wird, daß einer der Winkel a, b ein Rechter ist. Je weiter der beobachtete Stern entfernt ist, um so kleiner wird seine Parallaxe, bleibt aber immer positiv.

Im Falle der LOBATSCHEWSKYschen Hypothese dagegen wären die Parallaxen sämtlicher Sterne oberhalb einer gewissen (von k abhängigen) Grenze; bei der RIEMANNschen Hypothese schließlich müßten sehr weit entfernte Sterne eine negative Parallaxe haben.

Folgendes ist zu beachten: wenn die Parallaxen alle positiv und oberhalb einer gewissen Grenze gefunden werden, so kann man offenbar daraus noch nicht schließen, daß die euklidische Annahme über die Parallelen widerlegt ist; die näherliegende Annahme wäre vielmehr, daß die Entfernungen aller dieser Sterne unterhalb einer gewissen Grenze bleiben. Immerhin würde dadurch nicht der Zugang zu genaueren Untersuchungen der irdischen Dreiecke oder der Mechanik des Planetensystems versperrt sein, aus denen sich eine experimentelle Bestätigung der LOBATSCHEWSKYschen Geometrie ergeben *könnte*.

Würde jedoch die Parallaxe irgendeines Sternes negativ gefunden werden, so würde dies bei Beibehaltung der Annahme der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes ein Beweis für die Gültigkeit der RIEMANNschen Geometrie sein.

Aber *die Beobachtung sagt uns, daß die Parallaxen der Sterne alle positiv oder merklich Null sind;* und dies ist das Ergebnis, zu dem uns *die nächsten* Sterne führen, d. h. diejenigen, die eine mit unseren Instrumenten meßbare Parallaxe haben.

Aus der Parallaxe von 1″ schließt LOBATSCHEWSKY, daß sein Parameter k 200 000 mal größer ist als die

große Achse der Erdbahn, die ungefähr 300 Millionen Kilometer mißt. Es gibt aber auch Sterne, deren Parallaxe kleiner als 0,1″ ist, woraus folgt, daß k die besagte Achse 2 Millionen mal übertrifft; und der größte Teil der Sterne ist noch weiter entfernt, so daß er keine meßbare Parallaxe ergibt!

Demnach kann der physikalische Raum als euklidisch betrachtet werden, mit einer Annäherung, die die derzeitige Genauigkeitsgrenze unserer vollkommensten Instrumente überschreitet.

Dies ist die Schlußfolgerung Lobatschewskys, die sich in die Worte zusammenfassen läßt:

Nach dem augenblicklichen Stand unserer Kenntnisse ist der physikalische Raum als euklidisch zu betrachten.

Aber das rechtfertigt nicht die Behauptung, die Sache *könne nicht* anders sein.

Und es ist ungerecht, die Geometer deswegen anzuklagen, weil sie einen Zweifel erhoben haben, der nur für die Gegenwart beseitigt ist und auf eine vielleicht ferne Zukunft verschoben ist.

Wenn man gefunden hätte, daß die Parallaxen der Sterne alle oberhalb einer gewissen Grenze liegen, so ist nicht anzunehmen, daß man bei der Annahme der Entfernungen unterhalb einer Grenze stehen geblieben wäre. Wenigstens konnte man der geometrischen Annahme Lobatschewskys dadurch eine bestimmtere Form geben, daß man für den Parameter A einen nicht *zu* großen Wert wählte. Es wäre dann möglich geworden, sie, wie oben angegeben, in mehrfacher Weise zu kontrollieren, entweder indem man die Genauigkeit und die Zahl der irdischen Messungen vergrößerte oder indem man die mechanischen Folgen der Annahme untersuchte in bezug auf das Planetensystem. Es hätte dann sehr gut sein können, daß gewisse kleine Abweichungen von dem Newtonschen Gesetz eine Korrektur erfahren

hätten, die durch die bessere Übereinstimmung der Resultate befriedigt hätte.

Erst recht hätte man für die Annahme der später von RIEMANN formulierten nichteuklidischen Hypothese ein festes Fundament gehabt, wenn sich die Parallaxe irgendeines Sternes als negativ herausgestellt hätte.

Man kann auch nicht sagen, daß es genügt hätte, einfach die Hypothese der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes abzuändern. Es ist freilich leicht, die Dinge a priori in Übereinstimmung zu bringen, wenn man sicher ist, nicht durch die Erfahrung Lügen gestraft zu werden!

Zunächst kann ja diese Hypothese nicht angenommen werden, wie wir sahen, mit Rücksicht auf eine homogene Verteilung der Materie in dem umgebenden Medium, ohne das der euklidischen und der nichteuklidischen Geometrie gemeinsame Fundament zu erschüttern; wollte man aber konkret eine Einwirkung der Materie auf die Ausbreitung des Lichtes in den Himmelsräumen annehmen, so wäre eine solche Wirkung auf mehrere Arten einer indirekten Beobachtung zugänglich.

Anderseits könnte die RIEMANNsche Geometrie noch eine andere Bestätigung erhalten. In dieser Geometrie wäre nämlich die Gerade eine geschlossene endliche, wenn auch sehr lange Linie, so daß ein entfernter Stern zu gleicher Zeit von zwei Beobachtern gesehen werden könnte, die sich auf entgegengesetzten Punkten der Erde befänden.

Schließlich müssen wir wiederholen, daß, wenn auch vielleicht die geometrische Frage der Parallelen durch optische Beobachtungen auf dem Gebiete der Fixsternastronomie nicht endgültig hätte *gelöst* werden können, dennoch diese Beobachtungen den Zweifel der nichteuklidischen Geometer befestigen und bestimmter hätten gestalten und so dazu führen können, daß man dafür

in der Mechanik des Planetensystems eine indirekte Bestätigung suchte.

Wenn wir die Gültigkeit der euklidischen Geometrie mit einem Grade der Annäherung behaupten, der positiv mit der exakten Gültigkeit zusammenfällt, so sagen wir damit, daß *heute*, abgesehen von den *(zufälligen)* Fehlern, welche der Anwendung der durch die Geometrie symbolisch ausgedrückten Hypothesen anhaften, in den Hypothesen selbst kein Fehler ist, der durch die direkte oder indirekte Prüfung ihrer Folgen bemerkbar würde.

Die Bedeutung des durch LOBATSCHEWSKY erhobenen Zweifels besteht in dem bescheidenen Eingeständnis, daß wir nicht wissen, ob nicht in ferner Zukunft ein solcher Fehler festgestellt werden wird. Nur diese *Möglichkeit* wird von denen bestritten, die das Urteil der modernen Kritik über die *strenge* Gültigkeit unserer Geometrie nicht zugeben wollen.

§ 11. Die Nichtanschaulichkeit der nichteuklidischen Geometrien.

Was bleibt nun an Einwänden gegen diese Möglichkeit bestehen?

Der Bewertung der Erfahrungen steht nur das alte Argument entgegen, nach dem *unmöglich* ist, was *undenkbar* oder besser *unanschaubar* ist.

Allerdings stehen wir trotz der Konstruktion eines adäquaten Begriffssystems vor der *psychologischen Unmöglichkeit, uns die wirklichen Erscheinungen in einer von der gewöhnlichen Anschauung abweichenden räumlichen Form vorzustellen.* Aber dieses *Gefühl der Notwendigkeit*, das unsere Raumanschauung begleitet, sagt uns gar nichts über die Konstruktion des Raumes selbst, sintemalen die physische Wirklichkeit in keiner

Weise verpflichtet ist, sich nach der Vorstellung zu richten, die wir uns von ihr machen.

Um die Frage zu erklären, hat GAUSS einen Beweisgrund angeführt, der später von HELMHOLTZ und von CLIFFORD wieder aufgenommen wurde, und gewöhnlich unter dem Namen des ersten dieser beiden Philosophen geht.

Stellen wir uns *Flächentiere* vor, d. h. Tiere, die auf einer Fläche plattgedrückt wären und imstande wären, sich auf ihr kriechend zu bewegen. Versehen wir sie mit einer Raumanschauung, die dazu diente, in dem zweidimensionalen Gebilde (der Fläche), das *ihren Raum* darstellt, ihre Empfindungen zu ordnen und ihre Bewegungen zu leiten.

Zwei ähnliche Tiere, von denen das eine sich in einer Ebene, das andere auf einer schwach gekrümmten Fläche bewegte, könnten durch dieselbe geometrische Anschauung geleitet werden, indem sie sich beide ihren Raum als Ebene vorstellten.

Die Tatsachen, die im zweiten Falle dem Tiere erlauben würden, eine Kenntnis von der *Krümmung* seiner Fläche zu erlangen, ohne aus ihr herauszugehen (da es, nach Annahme, die dritte Dimension nicht kennt), sind ganz analog denjenigen, die uns Menschen die Falschheit der im strengen Sinne aufgefaßten Parallelentheorie anzeigen würden; aber diese Tatsachen würden sich der Kontrolle des Tieres entziehen, wenn es sehr klein wäre im Verhältnis zu der Fläche, auf der es lebt, und zu deren Krümmung.

Und dennoch, wenn sich in der Tiergesellschaft Philosophen befänden, wer weiß, ob nicht einer von ihnen aus der Anschauung, die sie sich von ihrer eigenen Umgebung als von einer ebenen Fläche gebildet hätten, auf die strenge und notwendige Ebenheit der Fläche selbst schließen würde?!

§ 12. Von anderen möglichen Geometrien.

In seiner Erinnerungsschrift „Gauss zum Gedächtnis" sagt Sartorius: „Gauss betrachtete die Geometrie als ein logisches Gebäude, nur sofern die Parallelentheorie als Axiom angenommen würde; aber er war zu der Überzeugung gelangt, daß dieser Satz sich nicht beweisen ließe, wenn man auch durch Erfahrung wisse, daß er annäherungsweise wahr sei."

Wir wissen nicht, ob der zweite Teil dieser Bemerkung wirklich den reifsten Ansichten von Gauss entspricht; wir sind sogar geneigt, daran zu zweifeln, in anbetracht der Beobachtungen, die er mit dem Theodoliten anstellte, um das Postulat der Geraden zu bestätigen.

Wie dem auch sei, die Meinung, die Sartorius Gauss im ersten Teile des aus seiner Rede zitierten Abschnitts zuschreibt, ist nicht annehmbar. Denn keinem der geometrischen Postulate kann der Charakter eines logischen Axioms zugeschrieben werden; und jede der (vom logischen Standpunkte, wie wir erkannt haben, fehlerhaften) Definitionen der geometrischen Grundbegriffe schließt eine Existenzbehauptung ein.

Wir haben schon bemerkt, daß die Grundeigenschaft der geraden Linie die Annahme einer gewissen Symmetrie in den Erscheinungen erfordert, d. h. eines Systems von Übereinstimmungen, ohne die es nicht möglich wäre, so viele verschiedenartige Tatsachen in einer *einzigen* geometrischen Vorstellung zu vereinigen.

Von dieser Hypothese können wir sagen, daß sie zurzeit von allen unseren Erfahrungen bestätigt wird, aber nicht mehr. Es erscheint nicht leicht, eine Abschätzung des Grades ihrer Genauigkeit zu geben, obgleich wir nicht fehlgehen dürften, wenn wir behaupten, daß ihre relative Genauigkeit ungeheuer groß ist.

Aber wenn man auch die Hypothesen, die den Grund der *Einheit* der (metrischen, optischen ...) Geometrie bilden, als Postulate annimmt, so darf man doch nicht glauben, daß damit *ein einziges* allgemeines geometrisches System, eine Pangeometrie, möglich sei, in der nur die Frage der Parallelen offen bliebe.

Im Gegenteil lehren uns die neuesten mathematischen Untersuchungen, daß dann noch unendlich viele verschiedene geometrische Systeme nicht nur logisch, sondern auch physikalisch möglich bleiben.

Als Beispiel führen wir die räumlichen Formen von Clifford-Klein an, welche mögliche physikalische Beschaffenheiten des Raumes darstellen, die ganz verschieden sind für einen Beobachter, der den engen Grenzen unserer Erfahrung unterworfen ist, und für einen, der sie beträchtlich erweitern kann.

§ 13. Die nichtarchimedische Geometrie und die Willkürlichkeit der Postulate.

In den vorstehenden Beispielen drücken die *Postulate*, die den verschiedenen Geometrien entsprechen, *verschiedene physikalische Hypothesen* aus; die in der vorliegenden Erfahrung noch nicht festgestellte Abweichung kann immer noch durch weitere mögliche Erfahrungen festgestellt werden. Aber man kann, und das ist in den letzten Jahren in der Tat geschehen, andere logisch voneinander verschiedene Geometrien konstruieren, denen dennoch keine hypothetischen physikalischen Verschiedenheiten entsprechen. Das schönste Beispiel bietet die *nichtarchimedische Geometrie*, die von Veronese (1891) konstruiert und neuerdings von D. Hilbert und seiner Schule mit Beziehung auf andere wichtige mathematische Probleme weiterentwickelt worden ist.

Diese Geometrie beruht auf der Leugnung des sogenannten Postulates, von dem man erkannte, daß es

von den gewöhnlichen anderen geometrischen Voraussetzungen unabhängig ist. Man nimmt also die „Existenz von Strecken an, derart, daß jedes noch so große ganze Vielfache der einen kleiner als die andere ist".

Eine solche Annahme hat einen bestimmten mathematischen Sinn als Beziehung zwischen gewissen Begriffen, aber sie hat *keinen physikalischen Sinn*, da sie in keiner Weise der Erfahrung zugänglich ist: eine *(aktual unendlich kleine)* Strecke, von der jedes ganzzahlige Vielfache kleiner ist als unsere Maßeinheit, wäre in bezug auf diese und auf unsere Sinne (z. B. den Tastsinn) transzendent definiert, so daß die Annahme einer solchen Strecke direkt keinen Gegenstand möglicher Sinneswahrnehmung darstellt.

Aber mehr noch, diese Hypothese hat auch keine indirekte physikalische Bedeutung. In der Tat hat VERONESE gezeigt, daß sich die Sätze der nichtarchimedischen Geometrie bei *unendlich hoher Annäherung* als identisch mit denen der gewöhnlichen deuten lassen, so daß man schließen kann: „*die archimedische und die nichtarchimedische Geometrie drücken vermittelst verschiedener Begriffssysteme dasselbe System von Annahmen über die Lagebeziehungen der Körper aus.*"

Demnach sind „*Postulate von verschiedener Form imstande, dieselbe physikalische Wirklichkeit darzustellen*".

Die nichtarchimedische Geometrie bietet eine interessante Illustration dieser *verhältnismäßigen Willkürlichkeit der Postulate* in bezug auf die wirkliche Welt, eine Willkürlichkeit, die F. KLEIN in seinem Gutachten für Kasan beleuchtet hat, und der POINCARÉ, unserer Ansicht nach, einen zu breiten Platz einräumt, wenn er jedes Postulat als eine *Verabredung* ansieht. Ein konventionelles Element ist allerdings in den Postulaten enthalten, insofern „Systeme von Postulaten existieren, die in verschiedener Weise dieselben physikalischen

Hypothesen ausdrücken"; aber neben diesen untereinander äquivalenten Systemen von Postulaten gibt es, wie wir sahen, auch solche, denen experimentell unterscheidbare physikalische Möglichkeiten entsprechen. Eine willkürliche Auswahl, die nur durch die an die räumliche Darstellung zu stellenden *ökonomischen* Anforderungen bestimmt wird, ist nur dann erlaubt, wenn es sich entweder um äquivalente Systeme handelt oder um solche nichtäquivalente, zwischen denen eine Entscheidung zu treffen der bisherigen Erfahrung noch nicht gelungen ist; aber im ersten Falle ist die Wahl gänzlich *konventionell* und frei, im zweiten dagegen enthält sie eine Hypothese über Tatsachen und nimmt daher das Ergebnis möglicher Erfahrungen vorweg, von denen nicht ausgeschlossen ist, daß sie jene Hypothese widerlegen werden.

B. Die psychologische Entstehung der geometrischen Begriffe.

§ 14. Die Problemstellung.

Wir haben gesehen, daß die Bewertung der Experimente dazu führt, verschiedene physikalisch mögliche Geometrien anzunehmen, und die mathematische Kritik zeigt schließlich, daß es möglich ist, ein und dasselbe System von Hypothesen über den wirklichen Raum durch verschiedene Begriffs- und Postulatensysteme darzustellen. Aber trotz der Willkürlichkeit, die infolgedessen der geometrischen Konstruktion anhaftet, trifft die Anschauung, wie sie sich in jedem Geiste ausbildet, eine bestimmte Wahl, indem sie eine psychologisch wohldefinierte Vorstellung des Raumes hervorbringt. Es erhebt sich demnach das für den Psychologen interessante Problem, diese Anschauung zu erklären.

Aber in welcher Richtung soll man eine solche *Erklärung* suchen?

Die Antwort schwankt zwischen zwei einander entgegengesetzten leitenden Gesichtspunkten, die sich gegenseitig den Rang streitig machen: dem *Nativismus* und dem *Empirismus*. Aus der KANTischen Behauptung, daß „die räumlichen Beziehungen solche seien, die der Geist zwischen möglichen Empfindungen herstellt", leitet sich der Nativismus ab, der die Anschauung von diesen Beziehungen an die anatomisch-physiologisch-psychologische Struktur des Menschen knüpft. Aus der Behauptung, daß „die räumlichen Beziehungen zu den Gegenständen der Sinneswahrnehmung (Gesichtssinn, Tastsinn usw.) gehören", folgert die empiristische Philosophie, daß die Anschauung der räumlichen Relationen einfach die Wiederholung vorhergegangener Sinneswahrnehmungen sei und sich letzten Endes auf eine Summe von durch Wahrnehmung vermittelten Kenntnissen und Tatsachen zurückführen lasse.

Nun scheinen die Voraussetzungen des Nativismus sowohl als des Empirismus bis zu einem gewissen Grade wahr zu sein, aber die daraus gezogenen Folgerungen einseitig und unvollständig. Der Nativismus verfährt so, als ob es möglich wäre, sich eine Seele zu denken, die vor der Anwendung der Sinne und unabhängig von der äußeren Welt gebildet wäre; der Empirismus wiederum führt alle psychische Aktivität auf eine passive Rezeptivität zurück.

Die beiden Ansichten können miteinander ausgesöhnt werden, wenn man versucht, *die Anschauung dadurch zu erklären, daß man sie als das Ergebnis einer von den Sinneswahrnehmungen ausgehenden psychischen Entwickelung auffaßt, wobei die Struktur des Subjekts berücksichtigt wird.*

§ 15. Beziehungen zu dem biologischen Problem der räumlichen Orientierung.

Aber das Problem kompliziert sich dadurch, daß zu der psychologischen eine biologische Untersuchung hinzukommt, die offenbar vorher angestellt werden muß.

Der empiristischen Behauptung, daß die räumlichen Beziehungen zu den Gegenständen der Sinneswahrnehmung gehören, stellen die Nativisten die Erwägung gegenüber, daß „eine Kenntnis der Lagebeziehungen als Bedingung der Möglichkeit des Gebrauchs der Sinne angesehen werden kann (Anpassung des Sinnesorgans an das Objekt)". Hier erhebt sich das Problem der *Orientierung im Raume*, d. h. der *Zuordnung der Bewegungen zu den Wahrnehmungen*, von dem viele glauben, daß die psychologische Frage sich ohne weiteres darauf zurückführen ließe.

Nachdem so der Gegenstand des Problems verschoben worden ist, dehnt die Entwickelungslehre die Untersuchung vom Menschen auf das Tier aus, und von dem tierischen Individuum auf die Art. Und der Empirismus verbindet sich mit der epigenetischen Ansicht LAMARKS in der Lehre SPENCERS[1]), der die Orientierung im Raume als eine Fähigkeit ansieht, die durch den häufigen Gebrauch der Sinne erworben, durch Vererbung übertragen und so in der Art befestigt worden ist.

Demgegenüber findet der Nativismus seinen biologischen Ausdruck in den präformistischen und neopräformistischen Theorien, die die Ursache der phylogenetischen Variation systematisch in den inneren mechanischen, physischen und biologischen Zuständen des Lebewesens suchen und es dem DARWINschen Prinzip der natürlichen

1) Vgl. besonders seine „Principes de Psychologie", übers. von RIBOT und ESPINAS. 1874 (Bd. II Kap. XIV).

Zuchtwahl überlassen, den Gegensatz gegen die äußere Umgebung zu beseitigen.

Wir beabsichtigen nun nicht, das Raumproblem unter diesem Gesichtspunkt zu untersuchen[1]). Es genügt hervorzuheben, daß in der Ersetzung des ursprünglichen Empirismus durch die SPENCERsche Lehre bereits das Zugeständnis liegt, daß in der räumlichen Orientierung des menschlichen oder tierischen Individuums etwas Angeborenes liegt.

Von dem hier Gesagten wollen wir uns vor allem das Ergebnis merken, daß ,,die Entwickelung der Zuordnung

1) Abgesehen von den allgemeinen biologischen Gesichtspunkten halten wir es für ziemlich zweifelhaft, ob sich ein Fortschritt in der angeborenen Zuordnung von Bewegungen und Sinneswahrnehmungen feststellen läßt, wenn man die zoologische Leiter hinaufsteigt. Während das Kind drei Jahre braucht um gehen zu lernen, und der erwachsene Blindgeborene, dem das Augenlicht wiedergegeben wird, drei Monate, um seinen Gebrauch mit den Bewegungen in Einklang zu bringen, zeigt sich bei den Küchlein eine bewundernswerte Schnelligkeit der Anpassung (s. die Experimente, die SPALDING an Küchlein vornahm, denen er Kapuzen aufgesetzt hatte, in dem Buche von ROMANES über „die geistige Entwickelung der Tiere" — S. 155 der frz. Übers.).

Anderseits zeigt die Überlegung, daß die Entwickelung des Organs der Zuordnung eine andere sein muß als die der Funktion. Diese hat die Tendenz, vom *Bewußten* zum *Unbewußten* überzugehen; ursprünglich ein *Willensakt,* wird sie immer mehr zum *Reflex* (vgl. LEWES „Physiology of common life"), jene dagegen strebt nach einer immer komplizierteren und bewußteren Funktion, je mehr sich die Nervenbahnen und ihre Verbindungen vermehren. Indem demnach die Mannigfaltigkeit der möglichen Koordinationen im Laufe der phylogenetischen Entwickelung sich vermehrt, so scheint es, als ob die Bedeutung des empirisch erworbenen Bestandteils in der Orientierung des Tieres ständig zu wachsen, während dagegen die ursprünglichen Orientierungsmethoden, die ziemlich unveränderlich geworden sind, mehr der Struktur des Organismus bei den niederen Formen anzugehören scheinen.

zwischen Bewegungen und Empfindungen, d. h. die räumliche Orientierung sowohl bei den Tieren als beim Menschen das Ergebnis von Erfahrungen ist, die unter gewissen anatomisch-physiologischen Bedingungen gemacht worden sind"[1]), ohne zu untersuchen, ob und wieweit diese Bedingungen mit den mechanischen Gesetzen des Organismus zusammenhängen.

Dabei müssen wir aber gleich gegen die Behauptung einiger neukantischer Philosophen Einspruch erheben, daß diese in dem anatomisch-physiologischen Bau des menschlichen Organismus liegenden Bedingungen sich in gewissen apriorischen Eigenschaften der Raumanschauung widerspiegelten, indem sie der Geometrie ihre Postulate lieferten, sobald einmal die geometrischen Begriffe aus Empfindungen gebildet seien. So versucht W. Wundt in den „Grundzügen der physiologischen Psychologie"[2]) (Bd. II S. 27) die *Ebenheit* des Anschauungsraumes aus der Anordnung der Augen zu erklären, die eine geradlinige Bewegung bevorzuge, obgleich es doch einleuchtet, daß der Bewegungsapparat der Augen ungefähr wie zwei zusammengesetzte Pendel wirkt, bei denen eine geradlinige Bewegung nur durch komplizierte Kompensationen erreicht werden kann. E. G. Heymans[3]), der sich bestimmter die psychologische Erklärung der geometrischen Postulate zur Aufgabe macht, betrachtet die gerade Linie als eine „gleich-

1) In seiner Untersuchung „Über die Raumwahrnehmung des Tastsinnes" (Berlin, Reuter-Richard, 1898) sieht sich V. Henri genötigt, beim Menschen das Vorhandensein einer ursprünglichen anatomisch-physiologischen Anlage zuzugeben, vermöge deren ein peripherischer Reiz Reflexbewegungen hervorruft, die das Tastorgan in die Nähe der gereizten Stelle führen.

2) Leipzig, Engelmann, 1880.

3) „Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie". 1888. Bd. XII, S. 279.

förmige Innervationsreihe“ (?) und gibt vor, daraus a priori ihre Grundeigenschaft, durch zwei Punkte bestimmt zu sein, abzuleiten, und zwar mit Hilfe eines analytischen Symbolismus, dessen Anwendung uns ganz willkürlich scheint.

Aber allen derartigen Versuchen müssen wir von vornherein entgegenhalten, daß, wenn auch die Orientierung von dem anatomischen Bau abhängt, sie uns doch nur durch gewisse Empfindungen (Muskel-, Tast-, Gesichts- usw. -empfindungen) zum Bewußtsein kommt, und die rohen Daten dieser Empfindungen gestatten nicht, die Willkür zu beseitigen, die der Auswahl der Postulate anhaftet, und besonders nicht ihnen den Charakter der Exaktheit zuzusprechen, der den anschaulich vorgestellten räumlichen Beziehungen zukommt.

Es handelt sich also hier um eine psychische Entwickelung, um eine Verarbeitung und Vereinfachung der Sinnesdaten, deren subjektive Bedingungen im Geiste selbst zu suchen sind und nicht im anatomischen Bau der Muskeln, Knochen usw.

§ 16. Programm der weiteren Untersuchungen.

Unserer Untersuchung wird es nun gelingen, diese Entwickelung als einen *Assoziations- und Abstraktionsprozeß* darzustellen und *die erwähnten Bedingungen auf die logischen Operationsgesetze zurückzuführen*, woraus sich dann gewisse formale Eigenschaften der Postulate und das mit ihnen verbundene Gefühl der Evidenz oder der Notwendigkeit erklären[1]).

Genauer: nachdem wir die *Entstehung der geometrischen Begriffe*, deren Beziehungen die Postulate aus-

1) Vgl. F. ENRIQUES, „Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria“. Rivista filosofica, Pavia 1901.

drücken, verstanden haben, werden wir sehen, daß diese Postulate sich in zwei Teile teilen lassen: der eine drückt einfach einen irgendwie evidenten Tatbestand aus, der aber die *Bedingung* dafür darstellt, daß eine gewisse Reihe von verschiedenen Vorstellungen, die unbegrenzt fortsetzbar ist, unter einen einzigen Begriff gebracht werden kann; der andere reduziert sich auf ein logisches Prinzip oder Axiom und gehört zu der bereits oben untersuchten logischen Funktion des Denkens (Kap. III).

Da der Begriff einer Figur als Repräsentant eines wirklichen Gegenstandes aufzufassen ist, der mehreren verbundenen Empfindungen entspricht, so stellt die Existenz oder die Möglichkeit eines hypothetischen Gegenstandes, der einer gegebenen Verbindung von Empfindungen entspricht, den *geometrischen Tatbestand* dar, der durch die Postulate ausgedrückt wird; die *Form* dagegen, in der sie vor der Anschauung des Geometers erscheinen, und die Evidenz, mit der sie verbunden sind, rühren von den *logischen Sätzen* her, *die sich auf denselben Tatbestand beziehen.*

§ 17. Quellen der Kritik.

Aber man kann in den Sinn dieser Erklärung nicht tiefer eindringen, ohne vorher das Problem gelöst zu haben, die Entstehung der geometrischen Begriffe zu erklären.

Die Tatsachen, die unsere Aufmerksamkeit verdienen, gehören einerseits der physiologischen Psychologie, anderseits der Geometrie an.

Denn es ist Sache der Physiologie, uns zu erklären, in welcher Weise die Ausdehnungsbeziehungen durch den Gesichts-, den Tast- oder den Muskelsinn wahrgenommen werden; um aber diese Ergebnisse in passender Weise zu deuten, muß man wissen, in welcher Weise

sich diese wahrgenommenen Beziehungen mit den geometrischen Begriffen verbinden.

Der physiologische Gesichtspunkt allein genügt noch nicht, um über die Probleme der Unterscheidung der gleichzeitigen Empfindungen oder der Lokalisation einer Empfindung oder der Bestimmung einer Lage im Raume hinauszukommen, und diese Probleme haben, wie unser Landsmann G. CESCA[1]) mit Recht bemerkt, noch nichts mit der psychologischen Erklärung der Entstehung der räumlichen Kenntnisse zu tun.

HELMHOLTZ hat mit Recht auf die hier vorliegende Notwendigkeit aufmerksam gemacht, die physiologische Forschung im Lichte einer Kritik der geometrischen Postulate zu leiten und zu interpretieren. Aber es scheint, daß man diese Lehre nach ihm nicht beherzigt hat, und daß gerade deswegen die experimentelle Arbeit, die von verschiedenen Seiten fortgesetzt wurde, nicht den Erfolg gehabt hat, den sie zu versprechen schien.

Indessen haben die Forschungen über die Grundlagen der geometrischen Wissenschaft, die zur Zeit von HELMHOLTZ eben anfingen sich der Hilfsmittel zu bedienen, die in den höheren mathematischen Disziplinen für sie bereit lagen, dank derselben eine ungeheure Entwickelung genommen. Und die Ergebnisse, die in dem dazwischenliegenden halben Jahrhundert erreicht worden sind, sind derart, daß kein Physiologe, der über die psychologische Raumfrage arbeitet, ihrer Kenntnis entbehren kann.

§ 18. Allgemeine Bemerkungen über den räumlichen Gehalt der Wahrnehmungen.

In jeder Wahrnehmung findet sich ein räumlicher Bestandteil oder kann sich darin finden. Es scheint,

1) „Le teorie nativistiche e genetiche della localizzazione spaziale". Verona-Padova, 1883.

daß bei den Hunden der Geruchssinn in hervorragender Weise an der Orientierung beteiligt ist. Und beim blindgeborenen Menschen sollen sich, nach dem Zeugnis von HITSCHMANN[1]) die räumlichen Vorstellungen gewöhnlich mit dem Gehör verbinden. Aber in der Regel sind es beim Menschen die Muskel-, Tast- und Gesichtsempfindungen, die durch ihr Zusammenwirken die räumlichen Vorstellungen erzeugen.

Gegenstände derselben sind *Punkte*, *Linien* und *Flächen*. Die Linien können durch Bewegung eines Punktes, die Flächen durch Bewegung einer Linie *erzeugt* werden; dennoch entsprechen die Linien und Flächen, sobald man sie sich verwirklicht denkt, Gruppen von Empfindungen, die von denen verschieden sind, welche die Variation des erzeugenden Gebildes liefert.

Hieraus ergibt sich eine zweifache Art, sich Linien und Flächen vorzustellen, auf die wir gleich die Aufmerksamkeit des Lesers lenken wollen, nämlich eine *genetische* und eine *aktuale*.

Die vollständige Vorstellung, die wir uns von einer Linie oder einer Fläche bilden, müssen wir uns entstanden denken aus der Verbindung der diesen beiden Betrachtungsweisen entsprechenden Empfindungsgruppen.

Aber nicht erst die Fläche oder die Linie, sondern bereits der *Punkt* darf nicht als *Gegenstand einer einzelnen Empfindung* betrachtet werden, sondern muß als etwas angesehen werden, *das einer Gruppe von verbundenen Wahrnehmungen entspricht.*

Die Behauptung der Existenz eines Punktes hat vor allem eine Bedeutung relativ zu der Lage des Beobachters und schließt die Aussage ein, daß gewisse

---

1) „Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane", III, S. 388.

Tast- oder Gesichtsempfindungen gegebene Muskelempfindungen, durch die gewisse Bewegungen subjektiv definiert sind, begleiten oder auf sie folgen. Nur in diesem Sinne, durch den eine Beziehung hergestellt wird zwischen einem expressiven und einem rezeptiven Sinn, kann man von der „Wahrnehmung eines Punktes" sprechen.

Aus diesem Gesichtspunkt löst sich auch das Problem der *räumlichen Lokalisation* nach der sogenannten *assoziativen Theorie* von Bain, Taine und Delboeuf.

Es kommt hinzu, daß die *Unterscheidung der gleichzeitigen Tast- und Gesichtsempfindungen* durch die sogenannten *Lokalzeichen* Lotzes möglich wird, indem man nämlich die Unterschiede zwischen den Punkten der Haut und zwischen denen der Netzhaut berücksichtigt, besonders im Hinblick auf ihre Beziehungen zu den benachbarten Punkten; es gibt also eine ziemlich befriedigende Lösung des Problems, physiologisch zu erklären, „wie es möglich ist, eine Lage im Raume zu bestimmen".

§ 19. Die physiologischen Räume und der geometrische Raum.

Da die Feststellung eines Punktes als rohe Tatsache von der Stellung des Beobachters abhängt und die Beziehungen zwischen den Punkten bei einer Veränderung dieser Stellung dem Subjekt als verschieden erscheinen, so bildet die Gesamtheit der so aufgefaßten Punkte einen von dem Beobachter selbst abhängigen *physiologischen Raum*, der von dem *geometrischen* verschieden ist. Diese grundlegende Unterscheidung findet sich in den „Beiträgen zur Analyse der Empfindungen" von E. Mach[1]) und in den von ihm zitierten Untersuchungen von Hering (op. c. 5. Aufl. S. 102).

1) Jena, G. Fischer, 1886.

Auch andere Autoren haben ihre Aufmerksamkeit dem Umstande zugewandt, daß der physiologische Raum nicht die Eigenschaften der Homogeneïtät und der Isotropie besitzt, die wir dem geometrischen Raume zuschreiben, z. B. H. POINCARÉ in seinem bereits zitierten Buche. Die Sache erscheint uns im übrigen so einleuchtend, daß wir es für unnötig halten, länger bei diesen Unterschieden zu verweilen.

Aber aus dieser Feststellung ergibt sich das Problem, zu erklären, wie man aus der gegebenen Raumwahrnehmung zu der geometrischen Vorstellung aufsteigt.

Man muß hier zu den Assoziationen der Wahrnehmungen einen *Abstraktionsprozeß* hinzunehmen.

Die Aussage, daß „*der geometrische Raumbegriff durch Abstraktion aus den verschiedenen möglichen physiologischen Räumen in bezug auf einen beweglichen Beobachter hervorgeht*“, kann jedoch nicht als eine erschöpfende Antwort auf die oben gestellte Frage angesehen werden, solange nicht aufgeklärt ist, wie der physiologische Raum selbst vermöge der Assoziationen und Abstraktionen sich einer quasi-geometrischen Vorstellung *in bezug* auf den Beobachter annähert, und anderseits, wie die unsymmetrischen Bestandteile, die den verschiedenen Räumen anhaften, bei ihrer Zusammenfassung beseitigt werden.

Die erste dieser Fragen zu lösen, wollen wir einer genaueren Analyse der Sinneswahrnehmungen überlassen, in bezug auf die zweite jedoch wollen wir bemerken, daß eine systematische Dissymmetrie in bezug auf die Bewegungen des Beobachters in der vertikalen Richtung durch die Schwerkraft gegeben wird; auch diese Bemerkung rührt von MACH her.

Wir glauben daher zu dem Schluß berechtigt zu sein, daß der Fortschritt von der physiologischen Vorstellung zur geometrischen auf einer Vergleichung der verschie-

denen möglichen *Sehräume* beruht, in die die Elemente, die von anderen Sinnen herrühren, bereits aufgenommen sind. Jene mechanische Dissymmetrie besteht nämlich nicht für die optischen Erscheinungen.

Eine ernstere Schwierigkeit, die von einem mehr verstandesmäßigen Abstraktionsprozeß herrührt, wird sich also bei der Entstehung des Raumbegriffs bei den Blindgeborenen einstellen; und eine ähnliche Schwierigkeit ergibt sich bei der *mechanischen Vorstellung* des Raumes, wie wir später zu bemerken Gelegenheit haben werden.

Wir wollen nunmehr dazu übergehen, im besonderen die begrifflichen Elemente zu untersuchen, die von den verschiedenen Sinnen der Raumvorstellung geliefert werden. Wir werden dieses Thema vor allem in einer Weise behandeln, die unsere Gedanken auch demjenigen zugänglich macht, der keine spezielle mathematische Vorbildung auf diesem Gebiete besitzt, und die die Notwendigkeit, in diesen Fragen solche Überlegungen anzustellen, deutlicher erkennen läßt.

§ 20. Die räumlichen Daten des Gesichtsinnes und die projektive Geometrie.

Es wird genügen, wenn wir aus den zahlreichen Forschungsergebnissen über die Physiologie des Gesichtsinnes (auf die sich die Beobachtungen und Experimente von Lotze, Weber, Volkmann, Fechner, Helmholtz, Panum, Donders, Hering, Wundt, James, Mach usw. beziehen) ein Grundschema des Prozesses entnehmen, ohne uns auf eine Diskussion der Einzelheiten einzulassen.

Die elementaren Tatsachen des Sehens sind die folgenden:

1. Die Entstehung des *Bildes* auf der Netzhaut, das einer ebenen Zentralprojektion des Gegenstandes entspricht.

2. Die *Augenbewegungen*, die normalerweise um das sogenannte DONDERSsche Zentrum erfolgen, und annähernd dem LISTINGschen *Gesetz* gehorchen und ferner dem der *konstanten Orientierung*, das davon abhängt.
3. Die *Vereinigung* der entsprechenden Bilder beim *binokularen Sehen*. Hierbei ist zu bemerken, daß normalerweise diese Vereinigung nicht nur dann stattfindet, wenn die Bilder in *(identische)* Punkte fallen, die auf den beiden Netzhäuten entsprechende Stellen einnehmen, sondern innerhalb gewisser Grenzen, bei den Bildern, die einem und demselben äußeren Punkte entsprechen, so daß infolge verschiedener Nebenumstände eine *Anpassung* des Organs stattgefunden hat; der einzelne Punkt wird ungefähr in der Richtung des Strahls gesehen, der den Winkel zwischen den beiden Sehstrahlen halbiert.

Nachdem dies vorausgeschickt worden ist, sind wir in der Lage, das viel umstrittene Problem zu diskutieren, „*ob der Gesichtsinn uns eine unmittelbare Wahrnehmung der Entfernung zwischen zwei Punkten, d. h. der Größe des Objektes vermittelt*".

Die einfache Tatsache des binokularen Sehens nach der Adaptation stellt sich als eine *bizentrale Projektion*, d. h. als eine doppelte und gleichzeitige Projektion des Objektes von zwei Zentren auf zwei Ebenen dar.

Wenn wir den Mathematiker fragen, was aus dieser Darstellung zu entnehmen ist, so braucht er sich nur auf die Untersuchungen über *Photogrammetrie* zu beziehen, mit der sich die neueren Arbeiten von HAUCK und FINSTERWALDER beschäftigen.

Zwei Projektionen des Objektes genügen, wie ersichtlich, um es zu rekonstruieren, wenn das *System der Projektion*, d. h. die respektiven Zentren und Ebenen,

gegeben sind. Dann kann auch die Entfernung zweier Punkte, deren Bilder bezeichnet werden, bestimmt werden, und zwar auf Grund gewisser Maße, die dem *gegebenen System* angehören, nämlich der Entfernung der Sehzentren der beiden Netzhäute und der Neigung ihrer Ebenen zueinander bei jeder gegebenen Adaptation.

In Ermangelung dieser Elemente genügen vier Bilder, um das Objekt, abgesehen von einer Ähnlichkeit, zu rekonstruieren; fünf Bilder, zwischen denen die nötigen Beziehungen bestehen, bestimmen außerdem noch seine Größe.

Was folgt aus diesen Resultaten für unser Problem?

Die Daten, die uns der Gesichtsinn beim Bewegen der Augen an den mannigfachen Bildern übermittelt, die wir uns von einem Gegenstand bilden können, enthalten die Elemente, aus denen mathematisch eine Vergleichung der Entfernungen abgeleitet werden kann; aber dies *hat* bei den einzelnen Bildern *keinen Sinn;* dazu kommt, daß man die Beurteilung der Entfernungen nicht als unmittelbar durch das Sehen gegeben betrachten kann, weil die metrischen Elemente des entsprechenden Projektionssystems zum Teil anatomische Daten sind und zum Teil solche, die von der Akkommodation abhängen und nicht als dem Beobachter *vor* der Erfahrung und vor der Vergleichung und Assoziation mit anderen Sinnen, die dazu nötig ist, *bekannt* angesehen werden können.

Daher muß die Erweiterung des Sehvermögens zu einer Wahrnehmung der Form und Größe der Gegenstände auf empirischem Wege erworben sein.

Die Notwendigkeit, bei dieser Entwickelung andere mit dem Gesichtsinn verbundene Empfindungen zu berücksichtigen, folgt auch aus der Theorie, die den Gesichtsinn als Ergebnis einer im Laufe der Entwickelung erfolgten Differentiation aus dem allgemeinen

Tastsinn betrachtet. In diesem Falle muß man eine gewisse unmittelbare Wahrnehmung der Entfernungen, die rein subjektiv ist, annehmen, vermöge deren mit dem Auge die *scheinbare Entfernung* zweier Punkte wahrgenommen wird, auf Grund der Länge ihrer Projektion auf die Netzhaut. Diese angeborene Beurteilung, die auch den Muskelempfindungen bei der Bewegung des Auges zukommt, kann nur durch eine ausgebreitetere Erfahrung, bei der die Bewegungen des Beobachters und die anderen Empfindungen hinzukommen, korrigiert werden.

Die vorstehenden Induktionen beruhen auf der Betrachtung des anatomisch-physiologischen Baues des Sehorgans. Sie werden unterstützt durch eine Untersuchung der Frage vom psychologischen Standpunkt.

Unter den mannigfachen Tatsachen, die von Helmholtz (Physiologische Optik) und seiner Schule festgestellt worden sind, wollen wir besonders den *Irrtum* anführen, der in manchen Fällen bei der *Vergleichung der Entfernungen* vorkommt. Die Erfahrung hat bewiesen, daß dieses vergleichende Urteil (dessen praktische Möglichkeit auf ein ziemlich enges Gebiet beschränkt ist) nicht gleichförmig und genau ausfällt, wenn die zu vergleichenden Entfernungen nicht vom Beobachter gleichweit entfernt sind, und daß ferner die Abschätzung viel unvollkommener wird, wenn sie verschiedene Richtung haben. Es kommt der Irrtum hinzu, der bei der Abschätzung des Parallelismus zweier Geraden vorkommt und der merkbarer ist als derjenige, der beim Erkennen der Konvergenz stattfindet, usw.

Helmholtz hat nun diese Tatsachen dadurch erklärt, daß er zeigte, daß das vergleichende Urteil über die Entfernungen nicht unmittelbar durch das Sehen gegeben wird, sondern ein Ergebnis der Gewohnheit ist, das Gesehene mit den Tast- und Muskelempfindungen zu kombinieren.

Nach allem Vorangehenden sind wir berechtigt, diese Unterscheidung als begründet anzusehen. Wir erkennen also als *unmittelbar durch den Gesichtsinn gegeben* den Komplex von geometrischen Eigenschaften des Objektes, die sich als *Eigenschaften der Projektionen* ausdrücken und nicht von seiner besonderen Lage und Entfernung von den Augen abhängen. Die Längen oder Entfernungen kommen darunter nicht vor und müssen als mittelbar durch Erfahrung festgestellt angesehen werden, nämlich durch die Verbindung mit den Tast- und Muskelempfindungen und nicht durch die Gesichtswahrnehmungen, die sich aus einer Ortsveränderung des Beobachters ergeben.

Aber diese Ergebnisse können nur von demjenigen richtig verstanden werden, der die Grundbegriffe der modernen Geometrie beherrscht! Gerade auf der Unkenntnis dieser Begriffe beruhen die unsinnigen Deduktionen, mit denen sich noch immer einige Philosophen abmühen.

Bei der Unmöglichkeit eines vergleichenden Urteils über die Entfernungen zwischen Punkten und folglich über die Größe der Objekte sollte man meinen, daß den unmittelbaren Daten des Gesichtssinnes alle geometrischen Vorstellungen fremd seien.

Dieser Irrtum kann nur durch ein Studium der projektiven Geometrie beseitigt werden, wie sie sich im vergangenen Jahrhundert seit PONCELET, MÖBIUS und STEINERT entwickelt hat, bis sie ihre endgültige Darstellung in dem Lehrbuch von STAUDT[1]) erhielt.

Nur so kann man sich einen Begriff von einer Wissenschaft machen, die die zwischen den elementaren Begriffen

1) Vgl. den historischen Anhang in den „Lezioni di Geometria proiettiva“ von Enriques. Bologna, Zanichelli, 1898. 2. Aufl. 1904 (d. Übers. v. Fleischer. Leipzig, B. G. Teubner, 1903).

der *Geraden* und der *Ebene* bestehenden *qualitativen Beziehungen* untersucht, die gänzlich unabhängig sind von den *quantitativen* (oder *metrischen*) *Beziehungen*, die in dem Entfernungsbegriff liegen, wenngleich sie meistens durch diese ausgedrückt werden.

Nun *zeichnen sich die Gerade und die Ebene* durch ihre optischen Eigenschaften für den *Gesichtsinn* aus: die Gerade, weil ihre Netzhautbilder Gerade sind, und die Ebene vermöge ihrer Beziehung zu der Geraden, die sich als eine *projektive Beziehung*[1]) zwischen den Bildern darstellt.

Diese ausgezeichnete Stellung bezieht sich offenbar auf das binokulare Sehen. Dennoch haben die Gerade und die Ebene auch bei dem monokularen Sehen eine ausgezeichnete Eigenschaft, wenn sie nämlich durch den Mittelpunkt des Auges gehen; die Gerade ist dann ein *Sehstrahl* und ihr Bild reduziert sich auf einen Punkt; die Ebene wird als Gerade gesehen. Diese besonderen Darstellungen verbinden sich mit den allgemeinen und bestimmen, wie wir sehen werden, einige Grundeigenschaften der Anschauung der in Rede stehenden Gebilde.

Es ist ein bemerkenswerter Umstand, daß für das binokulare Sehen eine krumme Fläche sich von einer ebenen unterscheidet, weil damit die Wahrnehmung von *Erhabenheiten* zusammenhängt.

Die Erhabenheit ist also eine Eigenschaft der Gesichtsvorstellung einer Fläche, die von der Beschaffenheit dieser Vorstellung selbst herrührt: die Beziehung zwischen den Netzhäuten unterscheidet sich von einer projektiven, insofern als dieselben Linien der Fläche, deren Bilder auf der einen Netzhaut Gerade sind, auf der anderen krumme Linien zu Bildern haben.

---

1) So nennt man eine punktweise Zuordnung zwischen zwei Ebenen, bei der die Geraden einander entsprechen.

Diese Art der Unterscheidung, die sich aus den unmittelbaren Daten des binokularen Sehens ergibt, hat nichts mit den Muskelempfindungen zu tun, welche die Augenbewegungen begleiten, die bei dem Übergang vom Anblick einer krummen zu dem einer ebenen Fläche erfolgen. Im ersten Falle hat man ein Merkmal der Krümmung, das in gewissem Sinne von der Betrachtung der Fläche in sich selbst abhängt, also von ihren *inneren* Eigenschaften; im zweiten Falle beurteilt man die Krümmung durch *(äußere)* Beziehungen der Fläche zu dem, was außer ihr vorhanden ist.

Wir besitzen also neben den möglichen genetischen Vorstellungen der Fläche eine aktuale in ihrem Relief. Dies ist gerade die Art, wie sich uns eine Oberfläche darstellt, die unseren Gesichtshorizont *begrenzt.*

Wir glauben nicht, daß man noch weiter gehen und eine *aktuale Vorstellung von dreidimensionalen Gegenständen* zugeben kann.

Diese Objekte entsprechen einer Folge von Flächenbildern in unserem Geiste oder dem abstrakten Begriff einer Reihe von Sukzessionen, aber beim adaptierten Sehen kommen sie niemals als für sich gegeben vor.

Die von STUMPF für das Gegenteil angeführten Gründe[1]) scheinen uns einen Circulus vitiosus zu enthalten. Der große Psychologe will die Notwendigkeit einer Vorstellung der drei Dimensionen aus der Tatsache ableiten, daß eine Fläche *zwei Seiten, außerhalb* ihrer selbst liegende Krümmungsmittelpunkte usw. hat; aber diese Betrachtungen führen die dritte Dimension, die genetisch *konstruiert* werden soll, bereits stillschweigend als *gegeben* ein! Nun enthält aber in Wirklichkeit die eigentliche aktuale Vorstellung einer Fläche als

1) „Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung". Leipzig, 1873 (an versch. Stellen und besonders S. 177 f.).

Grenze eines Gesichtshorizontes *nur eine Seite*, so daß der Begriff der Zweiseitigkeit aus der Superposition *sukzessiver* Bilder entsteht, usw.

Die Behauptung, daß die unmittelbaren Daten des Gesichtsinnes uns die Vorstellungen der Geraden und der Ebene vermitteln, bedeutet, daß *der Gesichtsinn uns die konstruktiven Elemente der projektiven Geometrie liefert.*

Demnach wird der unmittelbare Sehraum, da er durch Abstraktion aus den verschiedenen möglichen Sehräumen entsteht, abgesehen von den metrischen Assoziationen, ein *projektiver Raum* sein. Und da optisch jede Gerade beliebig verlängert gedacht werden kann, so wird sich dieser projektive Raum als *unbegrenzt* darstellen. In Wirklichkeit gelangt man ziemlich spät zur Erkenntnis dieser Unbegrenztheit; es gehört eine merkliche Anstrengung der Abstraktion dazu, um sich dieselbe vorzustellen auf Grund des festgestellten Zurückweichens des Horizontes, bei Annäherung an denselben.

In jedem Falle bleibt es eine Eigentümlichkeit der optischen Raumvorstellung, daß in ihr niemals zwei Punkte unmittelbar verglichen werden, die in entgegengesetzten Richtungen weit entfernt liegen. Daraus folgt, daß in dem projektiven Sehraum die beiden Parallelen, die durch einen Punkt zu den beiden entgegengesetzten Strahlen einer Geraden gezogen werden, nicht notwendig als zusammenfallend erscheinen. Das Zusammenfallen wird wenigstens nicht unmittelbar festgestellt werden können, und solange das nicht der Fall ist, wird der projektive Sehraum in unserem Geiste nicht die ganze Ausdehnung erhalten haben, die wir ihm zuschreiben. Um in mathematischer Sprache zu reden: der projektive Raum wird sich in seiner unmittelbarsten optischen Vorstellung als ein Körper innerhalb einer *uneigentlichen Grenzfläche* zweiten Grades darstellen.

Wir werden später sehen, daß Tastassoziationen dazu zwingen, diesen projektiven Raum zu erweitern bis zu der euklidischen Vorstellung, wo sich die uneigentliche Grenzfläche auf eine Ebene reduziert.

§ 21. Die räumlichen Daten der Tast- und Muskelempfindungen und die metrische Geometrie.

Die Physiologie der Tast- und Muskelempfindungen bietet schwierige und verwickelte Probleme, besonders auch, weil auf sie die Fragen über verschiedene besondere Sinne zurückgehen, die vom Standpunkt der Entwickelungslehre als eine Differenzierung des allgemeinen Tastsinnes erscheinen.

Die gewöhnlich angenommene Unterscheidung zwischen Druck und Temperatursinn erschöpft vielleicht nicht vollständig die verschiedenen *Qualitäten* des Tastsinnes. Noch zweifelhafter erscheint die Aufgabe der verschiedenen Nervenexpansionen, die sich in dem Gewebe der Haut finden, wie die sogenannten *Tastkörperchen* und die Vaterschen *Körperchen*.

Noch ernsteren Schwierigkeiten begegnet man bei der Erklärung des Muskelsinnes oder Sinnes der Muskelbewegungen, und bei der Bestimmung seines Verhältnisses zum Tastsinn. Es genügt, auf den Streit hinzuweisen über die Existenz einer besonderen Empfindung, die den zentrifugalen muskelbewegenden Nervenstrom begleitet, eine Empfindung, die unter dem Namen des *Innervationssinnes* in den Ansichten Wundts eine so große Rolle spielt und gleichfalls von Helmholtz und Mach angenommen, von James dagegen als überflüssige Hypothese verworfen wird.

Zum Glück scheint eine vorgängige Beantwortung dieser Fragen für den Zweck unserer Untersuchung nicht nötig zu sein. Es wird genügen, an einige Grundtatsachen zu erinnern:

1. Die Tast- und besonders die Druckempfindungen werden auf die Stelle der Haut bezogen, die berührt worden ist (LOTZES *Lokalzeichen*); aber diese Feststellung ist mit einem Fehler behaftet, der von Stelle zu Stelle beträchtlich wechselt, so daß zwei Punkte der Haut in der Umgebung einer gewissen Stelle nicht mehr als verschieden empfunden werden, wenn ihre Entfernung kleiner als ein gewisses Intervall *(Empfindungsschwelle)* ist.

2. Eine konstante Länge wird an verschiedenen Stellen der Haut als verschieden lang empfunden, und zwar als größer da, wo die Feinheit der Empfindung größer ist (WEBERS Experiment mit dem *Zirkel*).

3. Die Größe eines auf der Haut bewegten Gegenstandes wird genauer empfunden als die eines Gegenstandes, der an einer einzelnen Stelle der Haut in Ruhe ist, und diese Fähigkeit wird durch Übung beträchtlich gesteigert.

4. Dem Drucksinn steht der *Kraftsinn* und der *Muskelbewegungssinn* gegenüber. Mit diesem letzteren hängt die noch nicht ganz aufgeklärte Aufgabe der *halbkreisförmigen Bogengänge* des Ohres bei den Gleichgewichts- und Orientierungsempfindungen zusammen (GOLTZ und MACH).

Auf diese Tatsachen beziehen sich einige Bemerkungen über den räumlichen Gehalt des Tast- und Muskelsinnes.

Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Versuche von FECHNER und WEBER über die Schwelle der Tastempfindungen und die Empfindung gleicher Längen als ungleich.

Die Empfindungsschwelle kommt nicht nur dem Tast-, sondern auch dem Gesichtsinn zu; sie hat eine große Bedeutung, insofern sie uns zeigt, daß der *physiologische* (Tast- oder Seh-) *Raum nicht stetig ist.*

Es erhebt sich also das Problem, zu erklären, wie der Assoziations- und Abstraktionsprozeß, durch den die

geometrische Raumvorstellung aus den möglichen physiologischen entsteht, zu einem *stetigen Raum* führt.

Der zweite Punkt, der hervorgehoben zu werden verdient, ist der folgende: die vergleichende Beurteilung der Entfernungen und Längen und allgemeiner der Größen der Gegenstände erfordert die Bezugnahme auf ein als Sitz des konstanten Maßstabes ausgewähltes Tastorgan. Dieses Organ muß ohne Veränderung beweglich sein und an die Gegenstände angelegt werden können, damit auf diese Weise verschiedene Gegenstände metrisch verglichen werden können. Es wird also ein *besonderes* Organ der *Berührung*, das im Hinblick auf die metrischen Diskriminationen differenziert ist.

Dieses Organ ist für den Menschen im allgemeinen die Hand, aber diese kann, und das geschieht tatsächlich bei gewissen Gelegenheiten, durch einen Fuß oder irgendeinen anderen Körperteil ersetzt werden.

Man muß ferner annehmen, daß das Betasten sehr bald dem Menschen gestattet, die Invarianz bei der Bewegung der festen Körper zu erkennen, so daß diese als genaueste Instrumente der Vergleichung und Messung benutzt werden.

Eine auf der Haut entlanglaufende Spitze oder eine auf ihr ruhende Messerschneide liefern uns zwei Tastbilder der Linie; die eine ein genetisches, die andere ein aktuales. Wenn die Schneide leicht schürfend über die Haut hinfährt, so gibt das die genetische Vorstellung einer Fläche; die von dieser unterschiedene aktuale Vorstellung, die mit jener nur assoziativ verbunden ist, entspricht einer Platte von einer gewissen Länge, die auf die Haut gelegt wird.

Die Form einer Fläche und insbesondere ihre Ebenheit oder Krümmung können durch die aktuale Vorstellung gegeben werden, die auf solche Teile der Haut bezogen wird, welche an die betreffende Fläche angelegt

werden können; so entsprechen z. B. der gestreckten oder gekrümmten Hand offenbar verschiedene Muskelkontraktionsempfindungen.

Aber die Tastvorstellung der drei Dimensionen kann man nur genetisch erhalten. Sie wird uns vermittelt durch die Folge von Tasteindrücken einer bewegten Fläche, die mit einem Teil der Haut, der mit ihr zusammenhängt, sich zusammen bewegt. Die besonderen Tastorgane spielen bei alledem eine hervorragende, wenn auch nicht notwendige Rolle.

Unter allen Linien und Flächen sind die *Kreise* und *Kugeln* dadurch ausgezeichnet, daß sie unmittelbar durch Betasten erkannt werden können, weil die Entstehung dieser Gebilde aus der Vergleichung der Entfernungen hervorgeht.

Was die *Gerade* und die *Ebene* betrifft, so scheint uns deren ausgezeichnete Stellung wenigstens zum großen Teil mittelbar erworben zu sein. Allerdings sind einige Knochen ungefähr geradlinig, aber diese besondere Eigenschaft kann die Aufmerksamkeit nicht auf sich lenken, solange man nicht anderen bemerkenswerten Eigenschaften der Geraden begegnet ist, z. B. *Rotationsachse* fester Körper zu sein oder *Linie kürzester Entfernung*. Es ist auch eine muskulare Definition der Geraden auf Grund ihrer mechanischen Eigenschaften möglich. Wenn man jedoch alles in Betracht zieht, so scheint es, daß die *ursprünglichen konstruktiven Elemente*, die bei der Bildung des *Tast- und Bewegungsraumes* die hervorragendste Rolle spielen, *nicht die Begriffe der Geraden und der Ebene*, sondern der der Entfernung und infolgedessen die des *Kreises* und der *Kugel sind*.

Man kann das vorstehende Ergebnis so ausdrücken, daß man sagt: der *Tast- und Bewegungsraum* und insbesondere, sofern er durch sein *Spezialorgan gegeben* wird, *ist der metrische Raum*, dessen Eigenschaften aus den Grundeigenschaften der *Entfernung* fließen.

Daß dieser Raum und die Gerade in ihm *unbegrenzt* sind, ergibt sich aus der Möglichkeit, das Tastorgan oder einen beliebigen Gegenstand so zu verschieben, daß eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von gleichen Längen entsteht.

Es folgt daraus übrigens nicht notwendig die *Unendlichkeit* des Raumes selbst; die fortlaufend aneinander gesetzten Längen (eine Operation, die in der abstrakten Vorstellung als unbeschränkt gedacht werden muß) könnten nach Durchlaufung eines hinreichend großen Intervalls einander sehr wohl wieder überdecken. Die Erfahrung sagt uns nur, daß dies in dem uns erreichbaren Gebiete nicht eintritt. Der metrische Raum, dessen Vorstellung uns durch die elementaren Tast- und Muskelempfindungen geliefert wird, könnte also ebensowohl ein euklidischer wie ein LOBATSCHEWSKYscher oder ein RIEMANNscher sein. Und die Wahl der euklidischen Vorstellung, die die Blindgeborenen dennoch treffen, muß ihnen indirekt durch andere kompliziertere Erfahrungen suggeriert werden, während sie sich, wie wir später sehen werden, für den normalen Menschen aus der Verbindung des Tast- und des Sehraums ergibt.

§ 22. Parallele zwischen der geschichtlichen und der psychogenetischen Entwickelung der geometrischen Postulate.

Hier müssen wir kurz zu den Untersuchungen über die Prinzipien der Geometrie zurückkehren, die (wie wir im § 9 sagten) unter dem Einfluß RIEMANNS in verschiedenen Richtungen weiter geführt worden sind; durch Vergleichung mit den oben wiedergegebenen Ergebnissen dieser Untersuchungen werden wir erkennen, daß es *den Geometern gelungen ist, die Geometrie in diejenigen konstruktiven Bestandteile zu zerlegen, die den verschiedenen Gruppen von Empfindungen entsprechen.*

Gleichzeitig erhalten wir so eine allgemeine Einteilung der geometrischen Postulate, für die eine psychologische Erklärung erforderlich ist.

Bei den Untersuchungen über die Prinzipien der Geometrie[1]) kann man drei *Richtungen* unterscheiden: die *elementare*, die *metrische* und die *projektive*.

Die erste Richtung geht von dem Versuch einer *logischen Systematisierung* des euklidischen Organismus aus und endet mit der Begründung der nichteuklidischen Geometrie, von der wir gesprochen haben. In diesem letzten Stadium überwiegt das physikalische Interesse an der Frage das logische. Wie dem auch sei, diese elementare Richtung ist charakterisiert durch das Fehlen einer Analyse, die die *Trennung der geometrischen Begriffe* anstrebt; sämtliche Grundbegriffe (Gerade, Ebene, Kongruenz) werden nebeneinander betrachtet und man sucht nur die Sätze (Postulate), welche die ersten Beziehungen zwischen ihnen ausdrücken, möglichst *einfach* zu fassen und ihre gegenseitigen Abhängigkeiten zu beleuchten.

Die Trennung und tiefere Kritik der geometrischen Grundbegriffe hingegen charakterisiert das Stadium der Untersuchungen, das mit B. Riemann, dem größten Philosophen der Geometrie, beginnt. Hier tritt unter dem direkten Einfluß Herbarts, den dieser auf seinen Schüler ausübte, das *psychologische Interesse* leitend hervor. Anderseits werden die Beziehungen zwischen den geometrischen Begriffen von jetzt an mit Hilfe der höheren Mathematik untersucht.

Diese von Riemann — an den sich Helmholtz unmittelbar anschloß — ausgehende *Richtung* ist die *metrische*, die die Geometrie ganz und gar auf dem Begriff der *Entfernung* oder der *Länge einer Linie* innerhalb

---

1) Vgl. den S. 165 zitierten Artikel von Enriques.

einer *stetigen Mannigfaltigkeit* aufbaut. Diese Untersuchungen schließen sich einerseits an die von GAUSS begründete *Differentialgeometrie* an, anderseits an die Theorie der *Transformationsgruppen*, wie sie später von F. KLEIN, S. LIE, H. POINCARÉ ausgebaut worden ist.

Anderseits führte die Begründung der projektiven Geometrie und die von den metrischen Begriffen unabhängige Darstellung, die ihr STAUDT gegeben hatte, KLEIN dazu, einen neuen *(projektiven)* Weg zur Erforschung der Prinzipien der Geometrie einzuschlagen, bei dem die *(graphischen und optischen)* Begriffe der *Geraden* und der *Ebene* als Grundbegriffe auftreten.

Die Herstellung einer Verbindung zwischen diesen beiden Arten von Begriffen, den graphischen und den metrischen, hat seither viele Forscher beschäftigt, während andere die inneren Beziehungen der metrischen Geometrien und der projektiven erforschten, indem sie diese Untersuchungen mit anderen interessanten mathematischen Problemen in Verbindung brachten.

Aber die projektive und die metrische Geometrie haben ein gemeinsames qualitatives Substrat in der Gesamtheit der Beziehungen zwischen den allgemeinsten Begriffen der *Linie* und der *Fläche*, die eine *mehrdimensionale stetige Mannigfaltigkeit* charakterisieren. Ohne daß die Vorstellungen der Geraden, der Ebene, der Kongruenz usw. irgendwie hineinkämen, geben jene Begriffe Anlaß zu einem Zweige der Geometrie, den man *Theorie der Ausdehnung* oder *des Kontinuums* oder *Analysis situs* nennt, der aber mit der reinen Methode noch nicht sehr weit entwickelt ist.

Es folgt daraus die Nützlichkeit einer auf diese höchsten Prinzipien einer jeden Geometrie gerichteten Kritik, die einerseits an einige von RIEMANN kaum angedeutete Gesichtspunkte, anderseits an einige Untersuchungen von DEDEKIND, WEIERSTRASS, CANTOR usw.

anknüpfen könnte; die hier sich ergebenden Probleme sind von uns klar formuliert und in einigen speziellen Untersuchungen teilweise geometrisch behandelt worden (vgl. § 24).

Ohne länger bei diesem kurzen historischen Überblick zu verweilen, wollen wir nur festhalten, daß zugleich mit der Entwickelung der Kritik der Prinzipien der Geometrie sich eine Trennung der Geometrie selbst in zwei Zweige, den *metrischen* und den *projektiven*, vollzogen hat, die ihre gemeinsame Wurzel in der allgemeinen *Theorie des Kontinuums* (oder *Analysis situs*) haben.

Wir können jetzt erkennen, daß diese beiden Zweige den beiden Gruppen von Empfindungen, den Tast-Muskelempfindungen und den Gesichtsempfindungen entsprechen. Und wir können auch hinzufügen, daß der allgemeine Tast-Muskelsinn, der unabhängig von der Spezialisierung durch das Tasten auch die Grundlage der Netzhautempfindlichkeit ist, bereits die geometrischen Vorstellungen liefert, die sich auf die Theorie des Kontinuums beziehen, d. h. die Vorstellungen der Linie, Fläche usw.; dagegen ist, wie wir gesagt haben, die Schätzung der Entfernungen und damit eine genaue Vorstellung der Kongruenz oder geometrischen Gleichheit einem besonderen Bezugsorgan des Tastsinnes zu verdanken.

Diese Ergebnisse kann man schematisch folgendermaßen aussprechen:

Die drei Gruppen von Vorstellungen, die an die Begriffe anknüpfen, welche der Theorie des Kontinuums (Analysis situs), der metrischen und der projektiven Geometrie zugrunde liegen, hängen psychogenetisch mit drei Empfindungsgruppen zusammen, nämlich bzw. mit den allgemeinen Tast-Muskelempfindungen, den speziellen Tastempfindungen und den Gesichtsempfindungen.

Dieses Ergebnis leitet uns zu einer psychologischen Erklärung der Postulate der Geometrie und wird seinerseits durch dieselbe bestätigt.

§ 23. Die Stetigkeitspostulate: die Linie.

Wir wollen uns nun vor allem zu den Postulaten der Theorie des Kontinuums wenden, die sich auf die Begriffe der Linie und der Fläche beziehen.

Der Begriff der Linie entsteht, sagten wir, aus den verschiedenen möglichen genetischen oder aktualen Vorstellungen von ihr mittels einer Assoziation und einer Abstraktion.

Nach der genetischen Vorstellung ist die Linie eine Punktreihe, die nach ihrer psychisch gegebenen zeitlichen Reihenfolge geordnet ist (vgl. Kap. V); die im umgekehrten Sinne geordnete Reihe verbindet sich mit der ersten zu der aktualen Vorstellung, die in gewisser Hinsicht davon abstrahiert ist. So entsteht das erste fundamentale Postulat der *Umkehrbarkeit der linearen Ordnung*, das nach HERBART und BAIN ihren Unterschied von der zeitlichen Ordnung ausmacht.

Es bleibt noch die *Stetigkeit* der Linie zu rechtfertigen, die durch zwei Postulate ausgedrückt wird:

1. Zwischen irgend zwei Punkten einer Linie gibt es immer mindestens einen dritten.
2. DEDEKINDsches Postulat. Wenn eine Linie in zwei Teile (Klassen von Punkten) geteilt wird, derart, daß
   a) jeder Punkt der Linie einem von beiden Teilen angehört,
   b) jeder Punkt des ersten Teiles jedem Punkte des anderen (in einem der beiden Richtungssinne der Linie) vorangeht,

   so gibt es einen *Teilungspunkt*, dem kein Punkt des ersten Teiles folgt und keiner des anderen vorangeht.

Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf das erste Postulat.

Es ist vor allem klar, daß es eine Eigenschaft ausdrückt, die keiner empirisch gegebenen Reihe zukommt; es ist ja auch schon gesagt worden, daß im physiologischen Raum diese Eigenschaft der Linie durch die Erfahrung widerlegt wird.

Wenn zwei Punkte *A*, *B* einer Linie um weniger als die Reizschwelle voneinander entfernt sind, so ist es unmöglich, zwischen ihnen einen Punkt einzuschalten, der von den gegebenen unterschieden werden könnte. Immerhin konstatieren wir in der Regel durch viele Hilfsmittel, daß diese Unmöglichkeit dadurch gehoben werden kann, daß man einen empfindlicheren Teil des Tast- oder Sehorgans benutzt oder durch irgendwelche Mittel unser Wahrnehmungsvermögen verschärft.

Da mannigfache sinnliche Bilder sich zu der begrifflichen Vorstellung der Linie assoziieren, so müssen wir den vorstehenden Umstand dadurch erklären, daß wir annehmen, die Unmöglichkeit, in einem bestimmten sinnlichen Bilde einen Punkt *C* zwischen *A* und *B* zu unterscheiden, liege an einem *Mangel der Wahrnehmung*. Die Annahme dieser Erklärung wird noch dadurch begünstigt, daß die Unterschiedsschwelle der Empfindungen keinen absolut festen Wert hat, daß vielmehr die Bewegung des Objekts auf der Haut sie vermindern kann, usw.

Die Erweiterung der Erfahrung führt uns also dazu, die Einschaltung eines Punktes zwischen zwei anderen *A*, *B* auch dann für möglich zu halten, wenn dies nicht unmittelbar sinnlich klar ist. Immerhin hat diese Erweiterung in Wirklichkeit immer eine Grenze, die schnell erreicht wird. Wenn also der Begriff der Linie in uns durch Assoziation aller Sinnesbilder einer einzigen physikalisch gegebenen Linie entstände, so würden wir

niemals dazu geführt werden, die Einschaltung eines Punktes zwischen gegebenen für unbegrenzt fortsetzbar zu halten.

Nehmen wir aber einmal an, daß alle möglichen Linien zu einer einzigen Klasse von Vorstellungen vereinigt seien, und versuchen wir die Eigenschaften des daraus abgeleiteten abstrakten Begriffes zu bestimmen.

Die Assoziation stiftet in Gedanken zwischen zwei Linien l, l' eine eineindeutige Zuordnung ihrer Punkte, und das Experiment zeigt uns, daß eine solche Zuordnung dadurch erhalten werden kann, daß man zwei (verschiedenen) Punkten der einen A, B zwei beliebige Punkte A', B' der anderen zuordnet; das ergibt sich z. B. durch Aufeinanderlegen zweier verschieden stark gespannter elastischer Fäden, durch die projektive Aufeinanderbeziehung zweier Geraden, usw. Da nun zwei Linien l, l' derart aufeinander bezogen werden können, so muß man annehmen, daß zwischen den Punkten A und B auf l, ebenso wie zwischen den hinreichend weit entfernt angenommenen A' und B' auf l' immer noch ein Punkt eingeschaltet werden kann. Diese unbegrenzte Einschaltungsmöglichkeit bildet also eine notwendige Eigenschaft des Linienbegriffs, sofern dieser das ideale Ergebnis einer Assoziation und Abstraktion aus allen empirisch aufweisbaren genetischen Vorstellungen der Linien darstellt.

Aber diese Stetigkeit der Linie ist damit noch nicht erschöpft!

Woher kommt ihr zweiter im DEDEKINDschen Postulat enthaltener Teil?

Daß der hier notwendige Prozeß schwieriger ist, wird dadurch bewiesen, daß die Griechen nicht zur vollen Erkenntnis der Stetigkeit der Linie vorgedrungen sind, obwohl sie gezwungen waren, über das erste oben be-

schriebene Stadium hinauszugehen, als sie das Problem des Schneidens von Geraden und Kreisen behandelten.

Für dieses Problem muß man nämlich annehmen, daß die Strecke, die einen innerhalb eines Kreises gelegenen Punkt mit einem außerhalb gelegenen verbindet, den Kreis schneidet. Und man sieht leicht, daß damit zu dem Postulat 1. etwas Neues hinzukommt, denn die Gesamtheit der Punkte einer Geraden, deren Abszissen in bezug auf eine gewisse Maßeinheit *rational* sind, würde ein Punktsystem bilden, das dem Postulat 1. genügt, und doch würde es unter den oben angegebenen Voraussetzungen im allgemeinen nicht von einem Kreise getroffen werden.

Das Postulat des Schneidens von Geraden und Kreisen kann als ein Spezialfall des DEDEKINDschen aufgefaßt werden, wenn man die Punkte der Geraden in „innere" und „äußere" in bezug auf den Kreis einteilt.

Aber die griechischen Geometer verallgemeinerten nicht diesen Fall durch Betrachtung aller an einer Linie möglichen ähnlichen Einteilungen; oder sie machten höchstens Versuche in diesem Sinne, mit denen einige bekannte von ihnen überlieferte Trugschlüsse zusammenhängen.

Die Analyse des Stetigkeitsbegriffs ist eine Errungenschaft der modernen Wissenschaft, und das DEDEKINDsche Postulat drückt ihn in seiner vollsten und genauesten Form aus.

Daß „ein Punkt eine Linie in zwei Teile teilt", ist eine unmittelbare Folge der linearen Ordnung; die DEDEKINDsche Analyse fügt dem die Erkenntnis der Bedingungen hinzu, unter denen „die Teilung einer Linie durch einen Punkt geschieht". Diese entsprechen der Vorstellung des Punktes als *Element der Trennung* der Linie, die aktual betrachtet wird.

Das Postulat 2. der Stetigkeit drückt also die Bedingung aus für die Vereinbarkeit zweier verschiedener Vorstellungen vom „Punkte“, nämlich als erzeugendes Element der genetisch aufgefaßten Linie und als Teilungselement der aktual aufgefaßten Linie[1]).

Die genetische Erklärung der Stetigkeit bildet ein so wichtiges Problem, daß es sich lohnt, es auch von einer anderen Seite zu betrachten, indem man das DEDEKINDsche Postulat durch das ihm logisch gleichwertige WEIERSTRASSsche ersetzt: innerhalb einer Strecke besitzt eine unendliche Punktmenge immer *einen Häufungspunkt.*

Seien $A_1 A_2 \dots A_n \dots$ diese Punkte, die durch eine innerhalb der Strecke a wiederholbare Konstruktion definiert seien und einander z. B. von links nach rechts folgen mögen. An einem konkreten Bilde a_n von a werden die Punkte von einem bestimmten an ununterscheidbar werden; die Punktreihe $A_{n+1} A_{n+2} \dots$ wird z. B. als ein einziger Punkt aufgefaßt werden. Aber der hier auftretende Index n kann mit der Wahl des Bildes (a_n) von a variieren und bei geeigneter Wahl beliebig groß gemacht werden.

Nun hat die Annahme, daß in der (in Gedanken vorgestellten) Strecke a ein Punkt A als Häufungspunkt der $A_1 A_2 \dots A_n \dots$ existiert, den Sinn, daß bei der Verbindung der verschiedenen Vorstellungen die Reihe der Strecken $A_n A$, deren Enden in den einzelnen Vorstellungen nicht unterschieden werden können, *einem einzigen Punkte* zugeordnet wird.

---

1) Diese Erklärung der psychologischen Entstehung der Kontinuumsvorstellung, die wir in der zitierten Note von 1901 dargestellt haben, ist eng verwandt mit derjenigen, die H. POINCARÉ in seinem mehrfach erwähnten Buche „La Science et l'Hypothèse“ gibt (vgl. S. 35).

Eine solche Verbindungsweise ist das einfachste Verfahren, um einen abstrakten Begriff der Linie zu bilden; aber es ist nicht das einzig mögliche. Wenn man die Bedingung fallen läßt, daß die beiden Vorstellungen des Punktes als Erzeugers einer Linie und als ihr Ende sich so verschmelzen, daß sie einem einzigen abstrakten Gebilde entsprechen, so kann man mit VERONESE ein höheres nichtarchimedisches Kontinuum konstruieren, in dem aktual unendlich keine Strecken existieren, und in dem die (äquivalenten) Postulate von DEDEKIND und WEIERSTRASS nicht mehr gelten, sondern ein weniger enges Stetigkeitspostulat, das unter dem Namen CANTORS bekannt ist.

Indem wir von dieser abstrakten Konstruktion der nichtarchimedischen Geometrie absehen, fassen wir nunmehr die Ergebnisse zusammen, welche die gewöhnliche anschauliche Vorstellung der Linie betreffen:

Die Postulate der Linie, soweit sie das Verhältnis ihrer Teile zueinander betreffen, drücken die Möglichkeit aus, in einem einzigen abstrakten Begriff nach den logischen Denkgesetzen folgende Vorstellungen zusammenzufassen: die genetische Vorstellung einer empirisch gegebenen Linie und ihrer Umkehrung mit der Vorstellung der Zeitordnung;

die verschiedenen genetischen Vorstellungen derselben oder verschiedener Linien;

die erwähnten genetischen Vorstellungen mit den aktualen, wobei besonders die beiden Bildreihen des Punktes als Erzeugers und als Ende der Linie zu einer abstrakten Vorstellung vereinigt werden.

Andere Eigenschaften der Linie, die mit der Vorstellung der Fläche zusammenhängen, ergeben sich aus der Vergleichung ihrer aktualen Bilder; aber sie betreffen ihre *äußeren* Beziehungen, während der Begriff der Linie, für sich betrachtet, durch den beschriebenen Konstruktionsprozeß vollständig definiert ist.

§ 24. Postulate des zwei- und dreidimensionalen Kontinuums.

Der allgemeine Begriff der *Fläche* als einer *zweidimensionalen Mannigfaltigkeit* ergibt sich genetisch nach B. RIEMANN[1]) aus der Bewegung einer Linie.

Im weitesten Sinne genommen führt diese Erzeugungsart dazu, auf einer Fläche *zwei Kurvenscharen* als gegeben anzunehmen, *so daß jede der einen Schar jede der anderen in einem Punkte und nur einem schneidet*, die *erzeugenden* und die *Leitlinien* oder die Bahnen der Punkte der bewegten Linie.

Wenn man dann auf diesen Linien eine *Maßbestimmung* festgesetzt denkt, d. h. wenn der Begriff der *Bogenlänge* gegeben ist, so kann man die Punkte der Fläche durch ein *Koordinatensystem* darstellen, d. h. man kann zwischen ihnen und den Elementen (Zahlenpaaren) einer *numerischen* zweidimensionalen *Mannigfaltigkeit* eine eineindeutige stetige Zuordnung herstellen.

Will man die Maßbestimmung auf den Linien nicht von vornherein postulieren, so ist die Einführung der Koordination bloß auf Grund der in der RIEMANNschen Erzeugung liegenden Daten nicht möglich. Daher muß diese als eine unzureichende Definition der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit betrachtet werden, und S. LIE fügt ihr ausdrücklich die Annahme der Abbildbarkeit auf eine numerische Mannigfaltigkeit hinzu.

Um diese für eine Theorie des Kontinuums fundamentale Frage aufzuklären, haben wir eine Untersuchung[2]) angestellt, die folgendes Resultat ergeben hat:

---

1) Habilitationsschrift, Göttingen, 1854. (Göttinger Abhandlungen XIII, 1868.)

2) ENRIQUES — Circolo Matematico di Palermo, t. XII, 1898.

Man kann auf einer Fläche Koordinaten einführen, wenn mindestens *drei* Kurvenscharen auf ihr gegeben sind, so daß je zwei Kurven aus verschiedenen Scharen sich in einem Punkte schneiden; es genügt also im wesentlichen, daß die Fläche auf *zwei* verschiedene Weisen durch Bewegung einer ihrer Linien *erzeugt* werden kann.

Dieser Satz löst nicht nur das mathematische Problem, das zweidimensionale Kontinuum zu *definieren*[1]), sondern auch das psychologische, die Postulate zu erklären, die nach der gewöhnlichen Anschauung davon gelten. Die *Postulate* nämlich, die in der Annahme der numerischen Abbildbarkeit enthalten sind, *drücken die Bedingungen aus, unter denen es möglich ist, die verschiedenen genetischen Vorstellungen der Fläche zu einem abstrakten Begriffe zu vereinigen.*

Zu den Postulaten, die erlauben, die Fläche zu definieren, sofern sie für sich als zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit betrachtet wird, kommen diejenigen hinzu, welche die *äußeren Beziehungen der Linien auf einer Fläche* charakterisieren.

Zu dieser Art von Beziehungen gehören die Eigenschaften der *Teilung* einer Fläche durch eine *Grenzlinie*, dann die Existenz und die Gerad- oder Ungeradzahligkeit der Schnittpunkte dieser Grenzlinie mit einer anderen Linie, die zwei in verschiedenen Teilen liegende Punkte verbindet, usw.

Die Vorstellung solcher Eigenschaften wird immer bestimmter, je mehr der Begriff der „Linie auf einer Fläche" erweitert wird, je mehr gewisse Vorstellungen der Linie als Grenze sich mit denen als Erzeugende einer Fläche verbinden.

Geht man z. B. von der Vorstellung der Ebene aus, wie sie auf die verschiedenen möglichen Arten von einer

---

1) Vgl. unseren S. 165 zitierten Artikel.

Geraden erzeugt wird, so ergibt sich das Bild der von einer Geraden begrenzten Halbebene, und man hat das Postulat von Pasch, das die folgende *Teilungseigenschaft* ausdrückt:

Wenn A, B, C drei Punkte einer Ebene sind, so daß die Strecke BC die Gerade a nicht schneidet und die Strecke AB sie schneidet, so wird auch AC a schneiden; d. h. wenn B, C sich auf derselben Seite und A, B auf entgegengesetzten Seiten von a befinden, so befinden sich auch AC auf entgegengesetzten Seiten.

Nun stößt die Aufgabe, die Postulate auszusprechen, durch die der *allgemeine* Begriff der „Linie auf einer Fläche" definiert werden kann, auf die Schwierigkeit, für einen Prozeß eine Grenze anzugeben, der in der Anschauung vor sich gehend von gewissen Kurvenfamilien ausgeht und stufenweise zu immer allgemeineren Familien aufsteigt. Es ist daher zweifelhaft, ob und wie die mathematische Behandlung des Problems zu einem irgendwie abschließenden Resultate gelangen kann[1]).

Nichtsdestoweniger haben die vorstehenden Bemerkungen uns bereits den Weg gezeigt, auf dem die in Rede stehenden Postulate gefunden werden; es handelt sich darum, die aktuale Vorstellung einer Linie als Teilungsgrenze einer Fläche zu verbinden mit verschiedenen auf deren mögliche Erzeugung bezüglichen Vorstellungen.

Der Übergang von dem zwei- zu dem dreidimensionalen Kontinuum gibt zu keinen wirklich neuen Bemerkungen Gelegenheit; die Postulate, die die zu erzeugende Fläche definieren, dienen zur Definition dieses Kontinuums.

---

1) Wir führen die mannigfachen Ergebnisse von Cantor, Peano, Jordan und einige Bemerkungen über die *analytischen Kurven* usw. an, wofür wir auf unseren zitierten Artikel über die „Prinzipien" verweisen.

Wir wollen uns demnach darauf beschränken zu bemerken, daß das *Postulat der drei Dimensionen* eine Beschränkung des erzeugenden Prozesses bedeutet, durch den man von Punkten zu Linien, von diesen zu Flächen usw. übergeht.

Wir haben anderseits schon bemerkt, daß das dreidimensionale Kontinuum selbst nicht Gegenstand einer aktualen Vorstellung im eigentlichen Sinne ist (vgl. besonders § 20).

Was die *äußeren Beziehungen der Flächen* betrifft, so gibt es auch hier eine fortschreitende Konstruktion, die von speziellen Flächenfamilien zu allgemeineren aufsteigt.

§ 25. Die Postulate der projektiven Geometrie.

Wir haben gezeigt, daß die der Theorie des Kontinuums zugrunde liegenden Postulate die Bedingungen darstellen für die Vereinigung der verschiedenen auf Linien und Flächen bezüglichen genetischen oder aktualen Vorstellungen zu den abstrakten Begriffen der Linie und der Fläche. Unsere Kritik hat zu gleicher Zeit eine gewisse Unbestimmtheit dieser allgemeinen Begriffe aufgewiesen, die von ihrer Relativität herrührt und die eine progressive Konstruktion erforderlich macht, die einige besonderen Linien und Flächen voranstellt und von diesen ausgehend die bereits definierten Begriffe mehr und mehr erweitert.

Diese Notwendigkeit läßt in einem gewissen Sinne die Bedeutung jener Entwickelung erkennen, durch die der allgemeine Tast-Muskelsinn sich zum Gesichts- und speziellen Tastsinn differenziert.

Der Gesichtssinn zeichnet unter allen Linien die Gerade aus und vereinigt in ihr zwei Vorstellungen, die sowohl unter sich als von den anderen linearen Vorstellungen scharf unterschieden sind.

Die Gerade stellt sich nämlich entweder dar als eine Linie, die nicht durch das Sehzentrum geht und deren Projektionen Gerade sind, oder als Linie (Sehstrahl), die durch das Sehzentrum geht und die, mit einem Auge gesehen, einen Punkt als Bild ergibt.

Nun setzt die Verschmelzung dieser beiden Vorstellungen die *Existenz einer Linie* voraus, *die von jedem ihrer Punkte aus als ein einziger Punkt gesehen wird*, daraus folgt das *Postulat der Bestimmtheit der Geraden:* zwei Punkte gehören einer geraden Linie an, die gleichfalls durch zwei beliebige andere ihrer Punkte bestimmt ist.

Seien nämlich A, B, C drei Punkte einer Geraden, die von ihrem Punkte A aus betrachtet wird, und sei T das Netzhautbild (oder die Spur auf der Ebene der Netzhaut) derselben Geraden. Der Punkt T ist in diesem das Bild sowohl von B als von C. Daher ist die Gerade AB optisch definiert als Ort der Punkte, deren Bilder in T (das Bild von B) fallen, und die Gerade AC gleichfalls als Ort der Punkte, deren Bilder in T (das Bild von C) fallen.

Derselben Definition entspricht nach dem *Prinzip der Identität* dasselbe Ding, d. h.

$$AB = AC.$$

Aber vermittelst der Vorstellung der Geraden, die nicht durch das Sehzentrum geht, erweist sich die Gerade AC als identisch mit der Geraden CA, und da man hier dieselben Schlüsse wie oben machen kann in bezug auf einen anderen Punkt D, so ist

$$CA = CD.$$

Schließlich ergibt sich daraus die Identität der durch die Punktepaare AB und CD bestimmten Geraden.

Dieses Postulat, das eine Tatsache ausdrückt, von der die Möglichkeit abhängt, die Vorstellungen der Seh-

strahlen einer und derselben Geraden zu einem abstrakten Begriffe zu verschmelzen, wird zu einer Gleichheit in bezug auf diesen Begriff, wenn er wirklichen Objekten entsprechend gedacht wird. So erklärt sich das Gefühl der Notwendigkeit, das das in Rede stehende Postulat begleitet.

Ähnliche Überlegungen sind auf das *Postulat der Ebene* anwendbar: „die Ebene enthält die Gerade, die irgend zwei ihrer Punkte verbindet." Wenn man nämlich die Ebene durch *Projektion einer Geraden von einem Punkte außerhalb* entstehen läßt, so sagt das vorstehende Postulat, daß eine Ebene in gleicher Weise dadurch bestimmt wird, daß man von irgendeinem ihrer Punkte als Zentrum aus eine Gerade projiziert, die irgend zwei ihrer nicht mit dem Zentrum in gerader Linie liegenden Punkte verbindet.

Daraus folgt, daß dieses Postulat die Bedingung dafür ausdrückt, daß die verschiedenen Vorstellungen der Ebene und besonders diejenigen, die ihrem Anblick von einem ihrer Punkte aus entsprechen, zu einem abstrakten Begriff verschmolzen werden können.

Demnach haben wir *die eigentlichen Postulate der projektiven Geometrie erkannt als die Bedingungen der Möglichkeit der Verschmelzung gewisser Gesichtsvorstellungen, aus denen die abstrakten Begriffe der Geraden und der Ebene entstehen.*

§ 26. Die Postulate der metrischen Geometrie.

Die Postulate der metrischen Geometrie betreffen die *Bewegungen* und die *Kongruenz* oder die *geometrische Gleichheit* der Figuren, die dabei als *starre Körper* behandelt werden, welche sich durchdringen oder aufeinander gelegt werden können.

Die ersten Eigenschaften, auf die die Aufmerksamkeit des Kritikers gelenkt wird, sind diejenigen, die sich

auf die *Möglichkeit* und die *Freiheitsgrade der Bewegung* der starren Körper beziehen: wenn ein Punkt einer Figur festgehalten wird, so kann ein anderer eine Fläche beschreiben; werden zwei Punkte festgehalten, so kann ein dritter im allgemeinen eine Kurve beschreiben; werden drei beliebige Punkte festgehalten, so ist keine Bewegung mehr möglich.

Es ist ziemlich bezeichnend, daß in einigen unvollständigen Untersuchungen dieser Begriffe (z. B. in der von Hoüel) nur diese Eigenschaften unter den Postulaten vorkommen, während es dagegen als *Axiom* angesehen wird, daß die Kongruenz unter den logischen Begriff der „Gleichheit" fällt. In der Tat stellen sich jene Postulate unmittelbar als Ausdruck *mechanischer Versuche* dar; ihre Gewißheit verbindet sich nicht mit einem Gefühl der Notwendigkeit, vergleichbar demjenigen, das die Grundeigenschaften der Kongruenz begleitet, sondern nur mit der *Evidenz*, die aus *qualitativen Versuchen* hervorgeht.

Helmholtz scheint zuerst bemerkt zu haben, daß die geometrische Kongruenz nicht als eine Art der Gleichheit angesehen werden kann, ohne daß man andere wesentliche die Bewegung betreffende Tatsachen stillschweigend voraussetzt. Und S. Lie, H. Poincaré, D. Hilbert haben unter verschiedenen Gesichtspunkten die Sache klarer gemacht, indem sie diese Tatsachen einer neuen Kritik unterwarfen.

Der fundamentale Gesichtspunkt, von dem derartige Untersuchungen ausgehen, scheint zum ersten Male von F. Klein in seinem Erlanger Programm dargestellt worden zu sein (1871).

Er besteht in folgendem:

Eine Bewegung stellt im Raume oder in einem Teile des Raums eine *eineindeutige punktweise Zuordnung (Transformation)* her. Damit die Beziehung zwischen

zwei Figuren, die durch eine Bewegung ineinander transformiert werden können *(Kongruenz)*, als eine Gleichheit betrachtet werden kann, ist folgendes erforderlich:

Wenn man zwei Bewegungen hintereinander ausführt, so muß (als *Produkt*) wieder eine Bewegung herauskommen (dann ist, wenn $A = B$ und $B = C$, $A = C$);

die zu einer Bewegung gehörige *umgekehrte* Transformation muß wieder eine Bewegung sein (aus $A = B$, $B = A$ folgt $A = A$).

Dies kann man kurz ausdrücken, indem man sagt, daß „die Bewegungen eine *Transformationsgruppe* bilden". Es ist klar, daß diese Behauptung den Charakter der Behauptung einer Tatsache hat, die gewisse *Invarianzeigenschaften* der festen Körper bei der Bewegung und des Tastorgans unabhängig von der Art, wie es von einer Stellung in eine andere übergeht, einschließt.

Wenn nun feststeht, daß den Postulaten der Kongruenz ebenso wie den anderen geometrischen Postulaten ein empirischer Wert zukommt, wie erklärt sich dann das starke Gefühl psychologischer Notwendigkeit, das sie begleitet?

Betrachten wir der Einfachheit halber zwei kongruente Figuren, die aus zwei Paaren *äquidistanter* Punkte bestehen: $A\,B$ und $C\,D$; und sei z. B. die Entfernung der Punkte eines Paares *drei Finger*.

Wenn wir die drei Finger erst zwischen A und B und dann zwischen C und D legen, so werden wir nacheinander zwei Empfindungen haben, die sich durch die *Stellung* des Tastorgans unterscheiden, die aber etwas gemein haben, das an der Invarianz des Organs selbst beim Übergang von einer Stellung zur anderen liegt. Die Vorstellungen der beiden Paare $A\,B$, $C\,D$ sind nicht identisch, aber sie können vermöge *dessen, was sie gemein haben*, unter eine einzige begriffliche Vorstellung

der *Entfernung* untergeordnet werden. Wenn wir nun die Äquidistanz

$$A B = C D$$

aussprechen, so wollen wir damit zugleich eine Identität und eine Nichtidentität ausdrücken; die Möglichkeit, die beiden Vorstellungen auf Grund *gewisser Beziehungen* unter eine einzige unterzuordnen und sie auf Grund von *anderen* zu unterscheiden.

Was schließt also die Bildung des Begriffes der Äquidistanz, der die Grundlage der geometrischen Kongruenz bildet, in sich?

Eine Abstraktion und eine Assoziation, die unter einem gewissen Gesichtspunkt zwei Vorstellungen zusammenfaßt; infolgedessen *nehmen die auf die zusammengefaßte Vorstellung bezogenen Postulate der Kongruenz die Form der logischen Axiome der Gleichheit an.*

§ 27. Vereinigung von metrischer und projektiver Geometrie: das Parallelenpostulat.

Bisher haben wir diejenigen Assoziationsbedingungen betrachtet, welche für die Bildung der geometrischen Begriffe innerhalb einer einzelnen Empfindungsgruppe, der Tast- oder Gesichtsempfindungen, in Betracht kommen. Diese haben das gemeinsame Substrat in den aus der allgemeinen Sinnlichkeit abgeleiteten Begriffen, und sobald sie die beiden Bilder, das Tast- und das Sehbild des Punktes, verschmolzen haben, entstehen zwei Geometrien, eine Tast- und eine Gesichtsgeometrie, die sich auf dasselbe dreidimensionale Kontinuum, d. h. auf denselben Raum beziehen.

Die mathematischen Untersuchungen, von denen oben die Rede war, und die sich besonders über die zweite Hälfte des eben verflossenen Jahrhunderts erstrecken, zeigen, wie weit diese beiden Geometrien sich entwickeln können; wir können also sagen, daß wir mit

dem Tastsinn (dem allgemeinen und dem besonderen) eine *metrische* Geometrie und mit dem Gesichtssinn eine *projektive* konstruieren, die sich auf dieselbe Punktmannigfaltigkeit (den Raum) beziehen.

Diese beiden Geometrien verbinden sich also in unserem Geiste nicht zu einer einzigen Art von räumlichen Beziehungen, und jeder der Sinne (besonders das Gesicht) verschafft uns durch Assoziation die mittelbare Wahrnehmung dieser Beziehungen.

Eine derartige Verknüpfung erfordert ihrerseits neue Postulate. Man könnte nämlich in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zwei konventionelle abstrakte Geometrien konstruieren, indem man der einen ein lineares System von ∞^3 „Ebenen" genannten Flächen, der anderen eine Gruppe von ∞^6 „Bewegungen" genannten mit gewissen Eigenschaften versehenen Transformationen zugrunde legt; und diese Geometrien, die formal mit der gewöhnlichen projektiven und metrischen identisch wären, hätten a priori zueinander keinerlei Beziehung.

Die gewöhnliche Geometrie dagegen vereinigt das Gesichts- und das Tastbild der geraden Linie zu einem einzigen Begriff und erkennt so dieselbe *physikalische Symmetrie* in den optischen und den mechanischen Erscheinungen.

Diese Verbindung ist so innig, daß es einer sehr tiefgehenden Kritik bedarf, um die beiden Arten von miteinander vereinigten Begriffen zu scheiden. Auf den ersten Blick bemerkt man gar keinen Unterschied zwischen der optischen Grundeigenschaft der Geraden, durch zwei Punkte bestimmt zu sein, und ihrer mechanischen, Linie kürzester Entfernung oder Rotationsachse eines festen Körpers zu sein.

Der innerste Grund davon liegt in dem Umstand, daß die Vereinigung dieser Eigenschaften in dem Urteil

liegt: „eine Linie, die mit einer Geraden kongruent ist, ist eine Gerade."

Wenn man in dem eben hingeschriebenen Satz das Wort „kongruent" durch „gleich" ersetzt, so bedarf es einer großen kritischen Anstrengung, um sich bewußt zu werden, daß das ausgedrückte Urteil nicht auf eine Tautologie hinausläuft.

Und dennoch, wenn wir voraussetzen, daß das Licht sich nicht in der metrisch kürzesten, d. h. in der mechanisch definierten Geraden ausbreitet, so würde die Drehung eines Lichtstrahles um zwei seiner Punkte eine Linie ergeben, die ihm kongruent wäre und doch nicht, wie er, als Gerade im optischen Sinne angesehen werden könnte.

Die Kongruenz der geraden Linien drückt also die physikalische Grundtatsache aus, die sich auf die Ausbreitung des Lichtes in homogenen Medien bezieht. Diese Tatsache ermöglicht die Vereinigung der beiden Geometrien (der Tast- und der Gesichtsgeometrie) zu einer einzigen metrisch-projektiven derart, daß in dem erweiterten geometrischen System die Kongruenz, noch immer logisch betrachtet, eine Art der Gleichheit ist.

Man muß nämlich beachten, daß man durch ein Verfahren, das dem im Gebiete der Bewegungen untersuchten ähnlich ist, auch zu dem Begriff einer *projektiven* oder optischen *Gleichheit* gelangt, einer Beziehung, welche von den Geometern den Namen „*Projektivität*" erhalten hat[1]).

Nun stellt sich für den Gesichtssinn die metrische Gleichheit (Kongruenz) als ein Spezialfall der Projektivität dar. Sie bezeichnet die Identität der räumlichen Beziehungen der Teile zweier Figuren zueinander.

---

1) Eine Transformation, die die Geraden und Ebenen und folglich alle *graphischen Eigenschaften* ungeändert läßt.

Daher versteckt sich das metrisch-projektive Postulat der Kongruenz der Geraden in der Form eines Axioms der logischen Gleichheit.

Daher hat auch manch einer versucht, von hier aus zu einer Definition der Kongruenz als Identität der inneren Eigenschaften zweier Figuren zu gelangen. Aber auch abgesehen von ihrem unbestimmten Charakter ist diese Definition unzureichend; denn ohne Vergleichung mit irgendetwas Äußerem ist die Kongruenz nicht von der Ähnlichkeit zu unterscheiden.

Da der metrische Raum, der aus den Tastvorstellungen abgeleitet ist, und der projektive, der vom Gesichtssinn konstruiert wird, in dem abstrakten Begriffe des einzigen metrisch-projektiven Raumes verschmelzen, so bestimmt sich die Vorstellung von diesem vor allem als die eines *unendlichen Raumes;* die Unbegrenztheit der Geraden in optischer und in mechanischer Hinsicht, und ihr optischer Charakter als „offene Linie" schließen in der Tat die RIEMANNsche Vorstellung aus.

Immerhin bleibt noch zu erklären, wie man zu dem euklidischen Postulat kommt, indem man die hyperbolische Vorstellung LOBATSCHEWSKYS ausschließt.

Es ist natürlich, hierfür die Tast- und die Gesichtsvorstellung zu vergleichen, die wir uns von *parallelen Geraden* bilden.

Diese erscheinen optisch als Gerade einer Ebene, die sich nicht schneiden, genau, als Grenze von Geraden, die sich in einem sehr entfernten Punkte schneiden. In der Tastvorstellung hingegen stellen sie sich als *äquidistante Linien* dar.

Die Verbindung ergibt, daß *zwei Parallelen als äquidistante Gerade* (einer Ebene) betrachtet werden. Und die Annahme einer Existenz zweier solcher Geraden zieht bekanntlich das euklidische Parallelenpostulat nach sich; mit anderen Worten, sie führt dazu, die Ge-

rade, deren Strahlen einer gegebenen anderen nach ihren entgegengesetzten Richtungen parallel sind, optisch als einzige ihrer Art zu erkennen.

Das Parallelenpostulat entsteht also aus der Verschmelzung des Tast- und Gesichtsraums, die uns zu dem metrisch-projektiven Raumbegriff führt.

Wie sehr man auch über den wahren Wert dieses Begriffes streiten kann, er bleibt doch immer in seiner subjektiven Form euklidisch. Aber die Kritik, die ihn nach und nach in seine konstruktiven Bestandteile zerlegt hat, hat zuerst die kompliziertesten und jüngsten Verbindungen gelöst, die die Daten der verschiedenen Sinne untereinander verknüpfen, um dann immer weiter bis zu den ersten Anfängen des Bildungsprozesses aufzusteigen.

Können die vorstehend gegebenen Erklärungen über die Entstehung des euklidischen Postulates durch eine Untersuchung der Geometrie der Blindgeborenen bestätigt werden?

Und finden sie anderseits eine Stütze in der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie?

Auf die erste Frage scheint die Antwort lauten zu müssen: wenn das euklidische Postulat aus einer Verbindung von Tast- und Gesichtsvorstellungen hervorgeht, so werden die Blindgeborenen keinerlei Anschauung davon haben.

Diese Annahme ist aber jedenfalls a priori unannehmbar, da es doch klar zu sein scheint, daß in Ermangelung des Gesichtssinnes andere Tast-Muskelerfahrungen in ihrer Gesamtheit zu einer euklidischen Vorstellung des Raumes führen werden. Und so verhält es sich in der Tat; wir haben uns selbst davon überzeugen können.

Immerhin sollte man meinen, daß die Blindgeborenen nicht die gewöhnliche Abneigung gegen die nichteuklidische Hypothese empfinden müßten. Wir hätten recht

gern diesen Punkt aufgeklärt. Allerdings müssen wir das Experiment, das in dem Institut zu Bologna an einem mit einer gewissen geometrischen Bildung versehenen Blindgeborenen gemacht wurde, für unzureichend erklären; es würde uns kühn erscheinen, als Beweis für unsere Behauptung ohne weiteres das Zeugnis dieses Menschen anzuführen, der offenbar der Suggestionswirkung unserer eigenen Frage unterworfen sein konnte, als er die *Möglichkeit* der von uns in nichteuklidischem Sinne ausgesprochenen Zweifel bejahte.

Was wir aus dieser Befragung entnommen haben, ist die Überzeugung von der ungeheuren Schwierigkeit, auf diesem Wege zu gesicherten Schlüssen zu gelangen.

Eine Bestätigung der genetischen Erklärung des euklidischen Postulates liefert dagegen die Geschichte. Unser Freund G. VAILATI teilt uns nämlich mit, daß SACCHERI die Geringfügigkeit der vor ihm in der nichteuklidischen Kritik gemachten Fortschritte darauf zurückführte, daß sich viele Geometer bei der Definition der Parallelen als äquidistanter Geraden beruhigten; dies ist für SACCHERI ein *Irrtum in einer zusammengesetzten Definition.* Und gerade von der Aufdeckung dieses logischen Fehlers nimmt die eigene Kritik des genialen Forschers ihren Ausgang.

Aber was ist eine zusammengesetzte Definition anders als eine Art, implizite die Existenz eines Dinges zu postulieren, dessen Begriff aus der Verbindung mehrerer begrifflicher Vorstellungen hervorgeht?

Auf Grund hiervon kann man allgemeiner sagen, daß die angebliche logische Notwendigkeit der geometrischen Postulate immer in einem gewissen Sinne auf einer zusammengesetzten Definition beruht, wobei die verbundenen Vorstellungen für sich genommen sonst nicht in die Begriffssphäre fallen müßten.

§ 28. Schluß.

Von einem synthetischen Gesichtspunkt beleuchten die vorstehenden Betrachtungen über die Entstehung der geometrischen Begriffe die Mannigfaltigkeit der elementaren und unbewußt wiederholten Erfahrungen, die in der Raumanschauung wiedererweckt werden; aber mehr noch zeigen sie uns den langen Assoziations- und Abstraktionsprozeß, durch den dieselben Begriffe entstanden.

Die *Evidenz der Geometrie* erhält die Bedeutung einerseits der Leichtigkeit, die alten unbewußten Erfahrungen wieder zu erwecken, indem man sie sozusagen in der Anschauung der Bilder wiederholt, anderseits der Möglichkeit in der *Form* der Postulate die Assoziations- und Abstraktionsoperation wiederzufinden, die mit den konstruktiven Elementen des Raumes vorgenommen worden waren.

Die in den Postulaten vorausgesetzten Tatsachen stellen sich hierdurch dar als Bedingungen einer psychologischen Entwickelung, die sich nach den logischen Gesetzen und nach dem Prinzip der Sparsamkeit vollzieht und die zu der einheitlichen Vorstellung der geometrischen Wirklichkeit führt.



Kapitel V.

Die Mechanik.

Reale Bedeutung und psychologische Entwickelung der Grundsätze.

§ 1. Die Mechanik als Erweiterung der Geometrie.

Wir wollen absehen von den Zweifeln, welche die Kritik an der strengen Gültigkeit der geometrischen Postulate für zukünftige Erfahrungen erhebt. Die Geometrie erscheint dann als eine rein deduktive Wissenschaft, das Muster einer Wissenschaft für die rationalistischen Philosophen!

Aber dieser Charakter der logischen Vollkommenheit kommt ihr nur als theoretischem Lehrgebäude, d. h. als statistischer Regel (Kap. IV § 7) zu. Betrachtet man hingegen die Resultate der Geometrie nach ihrem Wirklichkeitsgehalt, d. h. faßt man die geometrischen Beziehungen als einen Teil der physikalischen auf (Kap. IV § 6), so sind die deduktiven Entwickelungen nicht imstande, uns über einen gewissen Grad hinaus eine noch genauere Voraussicht zu gestatten.

Die Trennung der Geometrie von der Physik durch Abstraktion ist nur dann von Nutzen, wenn diese Fälle in ihrer Gesamtheit als unter physikalisch *indifferenten* Bedingungen gegeben betrachtet werden. Wenn es aber gelingt, ihre *Unterschiede* so zu klassifizieren, daß man ihren systematischen Einfluß auf die Voraussicht abschätzen kann, so wird es gelingen *die Geometrie fortzusetzen, indem man ihre Begriffe durch Hinzunahme*

neuer Sinnesdaten ergänzt und so die wissenschaftliche Anwendung bestimmter gestaltet.

In diesem Sinne *stellt die Mechanik eine erste Erweiterung der Geometrie dar*, durch die zwischen den verschiedenen geometrisch als möglich angesehenen Lagebeziehungen der Körper eine Auswahl getroffen wird durch Berücksichtigung von Zeit, Kräften, Massen usw.

Nun verbinden sich diese neuen Elemente nicht einfach mit den räumlichen Daten, sondern sie werden in dem konstruktiven Prozeß der mechanischen Begriffe der geometrischen Vorstellung auch *untergeordnet*, weil dieser Prozeß *psychologisch* auf die Geometrie *folgt*.

Wir haben schon darauf aufmerksam gemacht (Kap. IV § 6), daß eine solche Rangordnung der Begriffe, die sich in der Anordnung der dogmatischen Darstellung der Wissenschaft widerspiegelt, nicht die Bedeutung einer *notwendigen Unterordnung* hat. Es ist nicht verboten, diese Ordnung zu verändern, und eine Mechanik zu konstruieren, die von irgendeiner geometrischen Hypothese unabhängig ist; diese wird dann durch eine ihr äquivalente mechanische Hypothese ersetzt werden können. So kann die Mechanik zu einer weiteren Bestätigung oder auch zu einer Verbesserung der geometrischen Prinzipien selbst führen.

Nehmen wir z. B. das fünfte euklidische Postulat über die Parallelen.

Die gewöhnliche Statik beruht darauf; aber eine tiefer gehende Kritik erlaubt uns, zu erkennen, wie eine nichteuklidische Statik beschaffen wäre: zwei gleiche auf einem starren Stabe AB in seinen Endpunkten senkrecht stehende Kräfte würden eine auf AB in seinem Mittelpunkte O senkrecht stehende Resultante ergeben, genau wie im euklidischen Falle; aber im Gegensatz zu diesem Falle wäre die Resultante nicht mehr gleich der Summe der beiden Komponenten (FONCENEX,

LAGRANGE, D'ALEMBERT, GENOCCHI, DE TILLY). Dies ist also ein statischer Ausdruck für das geometrische Parallelenpostulat, eine neue Annahme, die wir als in ihm enthalten erkennen und deren Bestätigung innerhalb der Grenzen der experimentellen Genauigkeit einen neuen Beweis für die euklidische Geometrie abgibt; hätte jedoch diese Verifikation eine merkliche Abweichung von der Voraussage erkennen lassen, so hätte sie zu einer Korrektur der Prinzipien jener Geometrie führen können.

Aber die Entwickelung der Mechanik hat solche Korrekturen nicht veranlaßt, so daß man sagen kann, daß *die Mechanik eine erweiterte Bestätigung der Geometrie geliefert* hat. Wenn es nämlich bei einigen Erscheinungen Schwierigkeiten macht, die mechanischen Prinzipien zu bestätigen, so hat sich doch nie eine Möglichkeit geboten, diese Experimente einer systematischen Korrektur zu unterwerfen, indem man irgendwelche der bereits angenommenen geometrischen Sätze modifizierte. Dieses Ergebnis stimmt übrigens zu dem Genauigkeitsgrade der Geometrie, wie er sich aus den unmittelbaren Verifikationen ergibt (vgl. Kap. IV § 10).

§ 2. Programm.

Will man die Mechanik als Erweiterung der Geometrie betrachten, so bietet sich als eine ziemlich natürliche Reihenfolge in der Behandlung des Gegenstandes die folgende dar:

1. Vor allem eine Analyse der *Zeit*, denn dieser Begriff erweist sich als dem des Raumes koordiniert, und wird schon vor der wissenschaftlichen Ausbildung der Erkenntnis fertig vorgefunden.

   Das Hinzutreten der Zeit zum Raume führt ohne weiteres zu denjenigen Begriffen, die die *Kinematik*

oder die erweiterte Geometrie der Bewegung ausmachen.

Da aber eine eingehendere Diskussion der *Bewegung* die kinematischen Begriffe mit den dynamischen in Beziehung setzt, so haben wir diese Diskussion zurückgestellt und dem dritten Teil unseres Programms einverleibt.

2. Eine Kritik der Begriffe und Prinzipien der *Statik*.
3. Eine Kritik der Begriffe und Prinzipien der *Dynamik*.

Die Trennung von Statik und Dynamik entspricht der historischen Überlieferung, die erst neuerdings von einigen verlassen worden ist, und drängt sich uns auf infolge unserer Art die Kräfte zu betrachten.

Wir fügen noch hinzu, daß wir, um die beiden Untersuchungen einander näher zu bringen und um in der Dynamik die klassische Vereinfachung anzunehmen, uns im Prinzip auf die *Mechanik der Punkte* beschränkt haben, obgleich es in der Statik hätte von Vorteil sein können, sofort die *Systeme* zu betrachten. Die auf diese bezüglichen Fragen werden also im letzten Teil des Kapitels behandelt, sowohl für die Statik als für die Dynamik.

§ 3. Die Zeit: Sukzession und Dauer.

Von zwei Wahrnehmungen oder Gruppen von solchen (Erscheinungen) bemerken wir, daß die eine *früher*, die andere *später* ist, oder daß sie *gleichzeitig* sind. Die *Anschauung*, die wir durch die Worte „früher" und „später" ausdrücken, liefert ein Merkmal, durch das die Erscheinungen in eine Reihe geordnet werden *(zeitliche Aufeinanderfolge)*.

Wenn wir von zwei Erscheinungen A, B und von zwei anderen C und D sprechen, so pflegen wir auch das *Zeitintervall* zu vergleichen, das zwischen A und B verstrichen ist, mit dem, welches zwischen C und D ver-

strichen ist, indem wir sagen, daß sie *gleich* sind, oder daß das eine *größer* als das andere ist. Dieses Urteil führt uns zu einer quantitativen Abschätzung, d. h. zu einer *Messung* der Zeit oder der *Dauer*.

Es ist klar, daß die Messung der Dauer, wenn sie festgesetzt ist, das Kriterium der zeitlichen Reihenfolge in sich schließt. Aber umgekehrt *liefert uns die Vorstellung des Früher und Später keinerlei Kriterium, um zwei Zeiträume zu vergleichen*, die nicht einen gemeinsamen Anfang (oder ein gemeinsames Ende) haben.

§ 4. Psychologische und physikalische Zeit.

Die Zeiturteile, seien es nun solche über Sukzession oder solche über Dauer, können sich auf verschiedene *Erscheinungsreihen* beziehen; ebenso wie die Urteile über Längen auf verschiedene Reihen von Körpern, die als Linien verglichen werden, bezogen werden können. Jede Erscheinungsreihe liefert uns in diesem Sinne eine *Zeitskala*, in der das Früher und Später wenigstens gegeben ist, und wo ein Kriterium der Vergleichung von Intervallen geliefert werden kann.

Der abstrakte Zeitbegriff entsteht durch Assoziation und Abstraktion aus dem aller möglichen Zeitskalen.

Der abstrakte Zeitbegriff, den wir als *physikalische Zeit* denken, enthält also die *Annahme* einer Zeitskala, in der jede *mögliche Erscheinung* ihre Stelle hat, im Unterschied von der *physiologischen* oder *psychologischen Zeit*, die die Skala aller *wahrgenommenen Erscheinungen* ist.

Die Annahme der physikalischen Zeit schließt im besonderen die Möglichkeit in sich:

1. die Zeitvorstellungen der verschiedenen Beobachter zu vergleichen;
2. die Zeiten an verschiedenen Orten miteinander zu vergleichen.

Die Übereinstimmung der verbundenen Zeitvorstellungen und die nachträgliche Bestätigung der daraus sich ergebenden Voraussagen wird den ***realen Charakter der Zeit*** beweisen.

Betrachten wir drei Erscheinungen *A*, *B*, *C* und drei Beobachter; einer von diesen beobachte *A* und *B*, der zweite *B* und *C*, und der dritte *A* und *C*. Wenn der erste Beobachter findet, daß

B auf *A* folgt,

der zweite, daß

C auf *B* folgt,

so kann man vorhersagen und es bestätigt sich in der Tat, daß für den dritten Beobachter

C auf *A* folgt.

Dies ist die Bedeutung der Übereinstimmung zwischen den Zeitvorstellungen verschiedener Menschen, und es ist leicht ersichtlich, daß hierin die Möglichkeit liegt, mehrere ihrer Zeitskalen zu einer einzigen auf einen hypothetischen Beobachter bezogenen zu verbinden.

Die Verbindung der auf verschiedene Orte bezogenen Zeitvorstellungen begegnet in der Wirklichkeit der folgenden Schwierigkeit: einige Empfindungen, die wir als zu einer lokalisierten Erscheinung gehörig verbunden denken, weil sie einem am Orte der Erscheinung befindlichen Beobachter sich als gleichzeitig darstellen, erscheinen dagegen einem an einem anderen Orte befindlichen als sukzessiv, z. B. das Licht und der Schall bei der Entladung einer Flinte.

Um die oben erwähnte Vereinigung zu ermöglichen, tritt folglich hier eine Hypothese hinzu, nämlich daß die partiellen Phasen einer Erscheinung, die räumlich aufeinander folgen, dies auch zeitlich tun *(Ausbreitungszeit)*. Und diese Hypothese wird bestätigt durch die Erfahrung an denjenigen Erscheinungen, die an ihren Ursprungsort reflektiert werden.

Damit man also eine Verbindung zwischen den auf verschiedene Orte bezüglichen Zeitvorstellungen herstellen kann, ist folgendes erforderlich:

entweder eine Erscheinung zu finden, die sich momentan ausbreitet;

oder die empirische Bestimmung der Gleichzeitigkeit der Erscheinungen mittels der Messung der Ausbreitungszeit zu korrigieren.

Abgesehen von dieser bald zu besprechenden Messung dient die fast momentane Ausbreitung des Lichtes (oder der Elektrizität) dazu, um praktisch die erforderte Verbindung herzustellen.

Aber der so festgestellte Begriff der Gleichzeitigkeit ist nicht streng und enthält daher einen merklichen Fehler; es ist in der Tat bekannt, daß Römer auf Grund von astronomischen Betrachtungen und Foucault durch einen direkten irdischen Versuch die Lichtgeschwindigkeit (ungefähr 300 000 km in der Sekunde) gemessen haben, von der sich später herausgestellt hat, daß sie auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen darstellt.

Um also das Kriterium der Messung zu übergehen, so wird die zeitliche Folge auf diese Weise nur mit einem Genauigkeitsgrade vom Raume unabhängig gemacht, der der Lichtgeschwindigkeit entspricht; innerhalb der Grenzen dieses für die gewöhnliche Praxis sehr hohen Genauigkeitsgrades können auf der Erde die konkreten Voraussagen, zu denen die Annahme einer solchen Unabhängigkeit führt, leicht bestätigt werden.

§ 5. Eigenschaften der zeitlichen Sukzession.

Die Eigenschaften der Ordnung, die wir als physikalische Zeit auffassen, ergeben sich aus den Bedingungen für die Verschmelzung der verschiedenen möglichen Zeitskalen.

Würden wir eine einzige Skala nehmen, die aus einer periodischen Reihe von Erscheinungen bestände, so würde diese uns eine Vorstellung von der Zeit als einer *geschlossenen Ordnung* liefern; aber die Mannigfaltigkeit unserer Wahrnehmungen in ihrer Zusammensetzung zwingt uns, die Zeit als eine *offene Ordnung* anzusehen, die sich dann beiderseits unbegrenzt ausdehnt durch die Annahme der möglichen Erscheinungen, die denen der gegebenen Reihen folgen oder vorangehen. Die periodischen Erscheinungsreihen lassen sich daher den nichtperiodischen durch Gleichzeitigkeit zuordnen, wobei jeder ihrer Erscheinungen eine Reihe immer wiederholter Stellen angewiesen wird.

Die *Stetigkeit der Zeitordnung* ist eine auf den physikalischen Zeitbegriff bezügliche Hypothese, zu der wir durch das Bedürfnis geführt werden, alle möglichen Zeitskalen zu einer einzigen abstrakten zu vereinigen, und besonders diejenigen, die mit der genetischen Vorstellung der verschiedenen *linearen Reihen* von Tast- oder Sehpunkten zusammenhängen (vgl. Kap. IV). Die *psychologische Zeit ist nicht stetig*, weil sie aus *Momenten* besteht, in denen die Erscheinungen alle nacheinander wahrgenommen werden und sich in einer *wie die Zahlen geordneten Reihe* darstellen.

§ 6. Die Zeitdauer.

Die Vorstellung einer Ordnung, nach der die Erscheinungen aufeinanderfolgen, erschöpft nicht den Inhalt unserer Zeiterkenntnis. Im allgemeinen kommt noch eine Maßbestimmung der Dauer hinzu, die sich vor allen auf die als Zeitskala genommene Erscheinungsreihe bezieht.

Ein Kriterium der Zeitmessung wird uns im allgemeinen geliefert durch jede Reihe von akustischen oder optischen Erscheinungen, die einander in unterscheid-

baren Zwischenräumen folgen, die aber häufig genug sind, um das ganze psychologische Aufmerksamkeitsfeld auszufüllen; die quantitative Abschätzung der Dauer in bezug auf diese Reihen wird durch die *Zählung* der Pausen gegeben.

An einer sichtbaren stetigen Reihe, z. B. der Reihe von Eindrücken, die dem Ziehen einer Linie, die von einem beweglichen Punkte beschrieben wird, entsprechen, kann man eine Messung der Zeitdauer bewerkstelligen, indem man die Zeitintervalle den von dem beweglichen Punkte beschriebenen Bögen zuordnet, die nach ihrer Länge gemessen werden.

Diese Kriterien, die sich auf die eine oder andere Erscheinungsreihe beziehen, welche als Zeitskala genommen wird, liefern eine rein *relative Zeitmessung;* die von verschiedenen akustischen oder optischen Reihen gelieferten Messungen sind untereinander nicht vergleichbar. Die Messung, die sich durch Konvention auf eine spezielle Reihe bezieht, dient nur dazu, eine genauere Voraussicht des Früher und Später innerhalb der als Bezugskala gewählten Reihe zu ermöglichen.

Mittels einer willkürlichen Zeitmessung können wir die einander folgenden Momente den Werten einer Variabeln t zuordnen, die das Zeitintervall ausdrückt, das seit einem gewissen Anfangsmoment verflossen ist.

Wenn man an Stelle von t eine *beliebige wachsende Funktion*

$$\tau = f(t)$$

nimmt, so hat man eine andere willkürliche Zeitmessung, die in bezug auf eine passende andere Zeitskala eine reale Bedeutung haben kann.

Diesem Begriff einer von den verschiedenen Reihen von sukzessiven Erscheinungen abhängigen Zeitmessung steht die Ansicht gegenüber, die NEWTON unter dem Einfluß der mittelalterlichen Philosophie

akzeptierte, von einer *absoluten* von den Erscheinungen unabhängigen *Zeit*, in der ein *wahres oder mathematisches Kriterium für die Vergleichung von Zeitintervallen* gegeben ist.

Diese Ansicht wird mit Recht von MACH durch historische, psychologische und linguistische Gründe bekämpft[1]).

Uns genügt es, daß wir in ihr derselben Art, den Abstraktionsprozeß transzendent aufzufassen, begegnen, die wir schon mehrmals kritisiert haben.

Wenn also die absolute Zeit als sinnlos erkannt werden muß, muß man deshalb auch schließen, daß die Zeitmessung rein relativ ist?

Bei diesem Ergebnis scheint der größte Teil der mathematischen Kritiker stehen zu bleiben; so z. B. P. VOLKMANN[2]), und auch MACH bekennt sich, soweit wir sehen, wenn auch weniger ausdrücklich zu ihr, wenn er die Messung der Zeit mit der der Temperatur vergleicht.

Um die Willkürlichkeit der Substitution

$$\tau = f(t),$$

die in die Zeitmessung eingeht, zu entfernen, benutzt man eine konventionelle Wahl der Bezugskala, indem

---

1) „Die Mechanik in ihrer Entwickelung" 4. Auflage, Leipzig, Brockhaus, 1901 (S. 232—237).

2) „Einführung in das Studium der theoretischen Physik." Leipzig, B. G. Teubner, 1900. Vgl. auch den Artikel von POINCARÉ über „la mesure du temps", den wir in dem eben erschienenen Bande „La valeur de la science" lesen. Es möchte seltsam erscheinen, daß gewisse in diesem Buche zur Rechtfertigung des nominalistischen Ergebnisses entwickelten Überlegungen einigen der von uns zu dem entgegengesetzten Zwecke beigebrachten Argumente gleichen. Aber der Grundunterschied liegt in der transzendenten Betrachtungsweise des französischen Philosophen (vgl. Kap. IV), die dem Geiste unserer Kritik entgegengesetzt ist.

man die Zeitintervalle den Räumen proportional setzt, die von einem beweglichen Körper, auf den keine Kräfte wirken, durchlaufen werden. Man nimmt also das *Trägheitsgesetz* nicht mehr als Ausdruck einer Beziehung zwischen Kraft, Bewegung und Zeit, sondern als eine *Definition der Zeit.* Diese kann, wohlgemerkt, in keiner Weise auf eine bloße *Vereinbarung* zurückgeführt werden, denn sie schließt die *Annahme der Tatsache* ein, daß „wenn zwei Körper, die keinen Kräften unterworfen sind, zu gleicher Zeit zwei Räume *a* und *b* durchlaufen, sie weiterhin zu gleicher Zeit Räume durchlaufen werden, die zu *a* und *b* proportional sind".

Dies ist in jedem Falle eine zu enge Auffassung der in der gewöhnlichen Zeitmessung liegenden Tatsachen. Es genügt darauf hinzuweisen, daß diese Messung älter als das Trägheitsgesetz ist!

Der gesunde Menschenverstand nimmt eine *natürliche Zeitmessung* an, der er unbestimmterweise eine besondere physikalische Bedeutung zuschreibt.

Welche Bedeutung kann man dieser Meinung beimessen, nachdem man aus der Frage jeden transzendenten Begriff einer von den Erscheinungen unabhängigen Zeit beseitigt hat?

Vergleichen wir die Messung der Zeit mit derjenigen der Temperaturen und der der Längen.

Die Zeit kann ebenso wie die Temperatur und wie der Bogen einer Linie oder (speziell) die Strecke einer Geraden durch eine numerische in gegebener Weise wachsende Variable t dargestellt werden.

Jede wachsende Funktion $f(t)$ an Stelle von t stellt in allen drei Fällen in gleicher Weise die *geordnete Folge* der Zeiten, der Temperaturen oder der linearen Längen dar; und man kann *konventionelle Uhren, Thermometer und Längenmaße* konstruieren, die einer willkürlichen Wahl der Funktion $f(t)$ entsprechen.

Für die Uhr genügt ein Instrument, das aus einem in geeigneter Weise auf einem Quadranten bewegten Bleistifte besteht, der als *gleich* diejenigen *Zeitintervalle* aufzeichnet, in denen die Funktion *f (t) gleichen Zuwachs* erfährt. Für das Thermometer genügt es, daß die Dilatationen der Thermometersubstanz auf einer Skala gemessen werden, auf der diejenigen *Temperaturzuwächse als gleich* angezeigt werden, die *gleichen Zuwächsen* von *f (t)* entsprechen; diese durch Vereinbarung als gleich betrachteten Temperaturzuwächse werden anderseits zu den entsprechenden Volumvermehrungen der Thermometersubstanz je nach der Natur der gewählten Substanz in verschiedenen Beziehungen stehen. Was das Längenmaß betrifft, so kann man sich ein solches gemäß der festgesetzten Bedingung herstellen, indem man sich eines *eingeteilten elastischen Fadens* bedient, der in seinen verschiedenen Teilen verschieden gespannt ist, wobei die Sache sich übrigens so verhält, daß ein beliebiges Stück des Fadens in zwei Lagen auf dieselbe Weise gespannt ist, wenn er durch eine Bewegung von der einen in die andere übergeführt werden kann.

Nun stellen verschiedene willkürliche Thermometer unsere Empfindungen der Temperaturveränderung gleich gut dar; die Empfindung, nämlich die wir beim Übergang von 0 zu 1 Grad eines gewöhnlichen Quecksilberthermometers haben, ist mit der, welche wir beim Übergang von 20 zu 21 Grad haben, in keiner Weise vergleichbar; wenn daher ein anderes Thermometer diesen letzten Zuwachs als doppelt so groß wie den ersten angibt, so haben wir in der Wahrnehmung kein Kriterium, um eine von diesen beiden Indikationen zu bevorzugen.[1])

---

1) Über die Bedeutung der absoluten Temperatur vgl. Kap. VI.

Aber von den verschiedenen möglichen konventionellen Maßstäben können wir das nicht sagen. Denn nur einer von ihnen, und zwar derjenige, der aus einem *starren undehnbaren Faden* besteht, stimmt mit den durch das Tastorgan gelieferten *Längenempfindungen* überein. Wir betrachten daher diesen Maßstab als das *natürliche Längenmaß* und erkennen, daß diese Art zu messen zu ihrer Möglichkeit eine *allgemeine Tatsache* voraussetzt, nämlich die *Invarianz der starren Körper* im Verhältnis zum Tastorgan und zueinander *bei der Bewegung.*

Was werden wir nun von der Uhr sagen? Gibt es eine Uhr, deren Angaben einer Empfindung von der Dauer entsprechen, die auf eine gewisse klar unterschiedene Erscheinungsreihe bezogen ist, und die wir meinen, wenn wir von einer *natürlichen Zeitmessung* sprechen? Und gibt es eine allgemeine Tatsache, die sich in der Übereinstimmung der von diesen Zeitskalen gelieferten Angaben ausdrückt?

Kurz, gibt es neben den mit der Zählung der Pausen in einer beliebigen Reihe von getrennten Erscheinungen zusammenhängenden Empfindungen eine Empfindung der Dauer, die sich auf eine Reihe von *isochronen* Erscheinungen bezieht, und die sich mit der Tastempfindung der Länge vergleichen ließe, oder hat die Dauer für die Empfindung keine eigene Bedeutung, wie dies bei der Quantität der Temperaturvermehrung der Fall ist?

Wir wollen die vorstehenden Fragen beantworten:

Wir haben die *Empfindung des Rhythmus* bei gewissen akustischen Reihen, die wir *isochron* nennen; die verschiedenen von uns als isochron empfundenen Tonreihen liefern uns miteinander vergleichbare Zeitmessungen, d. h. sie liefern uns, wenn auch mit geringer Genauigkeit, dieselbe Abschätzung *gleicher Intervalle* und folglich dieselbe *natürliche Zeitmessung.*

Daß das Gehör uns eine ziemliche genaue Wahrnehmung des Isochronismus liefert, und daß über die Wahrnehmung des musikalischen Rhythmus Übereinstimmung besteht, ist wenigstens in bezug auf musikalisch geübte Ohren unbestreitbar.

Man könnte allerdings zweifeln, ob es sich um eine ursprüngliche Gehörswahrnehmung und nicht vielmehr um eine Assoziation mit gewissen Muskelbewegungen handelt, die bei fortgesetzter Wiederholung die Tendenz haben, sich regelmäßig zu vollziehen.

Es ist allgemein bekannt, daß die Musiker zu einem derartigen Verfahren greifen, wenn es sich darum handelt, das *Tempo zu schlagen.* Und der Isochronismus der langsam wiederholten Hand- oder Fußbewegungen hängt vielleicht mit dem Rhythmus gewisser Organfunktionen und besonders des Pulses zusammen.

Man könnte also sagen, daß das Ohr uns die Vorstellung des Isochronismus und damit der Dauer durch Verbindung mit dem Muskelsinn vermittelt, ähnlich wie das Auge uns die Vorstellung der Längen durch Verbindung mit den Daten des Tastsinnes liefert.

Welche Ansicht man aber auch darüber haben mag, es bleibt immer bestehen, daß „wir mittels einer Reihe wiederholter Bewegungen, die von Tönen begleitet sind, eine Zeitmessung vollziehen können, über die die Menschen in engen Grenzen, aber mit hinreichender Genauigkeit einig sind, wie über ein Objekt einer besonderen Wahrnehmung der Dauer“.

Und da sich an die Empfindung der Dauer fortwährend bestätigte Voraussagen knüpfen, so können wir von der *Dauer* als von *etwas Wirklichem* sprechen.

Jede Uhr also, deren Angaben dieser Empfindung entsprechen, muß als ein *Maßstab der physikalischen Zeit* angesehen werden, zum Unterschied von einer beliebigen anderen konventionellen Uhr. In einer solchen

Uhr haben wir daher ein Mittel, die *natürliche Zeitmessung auszudehnen* über die engen Grenzen, auf die wir bei der Benutzung einer isochronen Tonreihe angewiesen sind.

Die Übereinstimmung in der Empfindung der Dauer sichert uns bereits eine *gewisse* Übereinstimmung der danach regulierten Uhren; wenn man aber eine *genauere* Übereinstimmung findet, so wird sie eine allgemeine Tatsache darstellen, die zu erkennen wir uns nunmehr vornehmen.

§ 7. Das Postulat der Zeitmessung.

Bei der Ausdehnung der Vergleichung der Zeitintervalle über die Grenzen der ursprünglichen Empfindung hinaus folgen wir demselben Wege, der in ähnlichen Fällen eingeschlagen zu werden pflegt.

Gehen wir von der Voraussetzung aus, daß die *Gleichheit der Zeitdauer innerhalb genauerer Grenzen* als den durch die unmittelbare Wahrnehmung gegebenen eine *reale Eigenschaft* der Erscheinungen ausmacht. Wir werden dann zu der Annahme gedrängt, daß diese Gleichheit bei allen den Erscheinungen stattfindet, die sich unter bestimmten *konstanten Bedingungen* vollziehen, und die wir auf *gleiche Ursachen* zurückführen. Mag auch eine solche Annahme keinen streng zu bestimmenden Sinn haben, so führt sie doch unmittelbar dazu, folgendes zu untersuchen:

1. ob Erscheinungen, die sich unter *ähnlichen*, praktisch konstanten *Bedingungen* vollziehen, die wir also als Wirkungen *merklich gleicher Ursachen* betrachten, für die Empfindung des Isochronismus gleiche Dauer haben;
2. ob solche Erscheinungen, wenn sie jenseits der Grenzen der unmittelbaren Wahrnehmung ver-

glichen werden, zu derselben Bestimmung gleicher Zeitintervalle führen;

3. ob eine bei der Bestätigung der Annahme 2. etwa auftretende Abweichung nicht dadurch immer kleiner gemacht werden kann, daß man immer mehr, soweit wie möglich, einige Ungleichheiten beseitigt, die den als gleich betrachteten Erscheinungen anhaften.

Die den Fragen 1., 2., 3. entsprechenden Annahmen bilden das *fundamentale Postulat der Zeitmessung*, auf das wir uns direkt oder indirekt bei der Konstruktion und bei der Korrektur von Uhren berufen. Die *Übereinstimmung der* so konstruierten *Uhren* innerhalb der Grenzen, in denen man sie erreichen kann, bildet die Bestätigung dieses Postulates; die Wahrheit des Postulates kann hypothetisch als *streng* angenommen werden, solange man keine *systematischen Fehler*, sondern nur *zufällige* findet, die bei der Durchschnittsbildung herausfallen.

Wir wollen versuchen, das Gültigkeitsgebiet des eingeführten Postulates zu bestimmen.

Dazu überlegen wir uns folgendes:

1. Auf der Erde erhält man schon eine erste merkliche Übereinstimmung der verschiedenen Uhren, der Sanduhren, der Wasseruhren, allgemein aller derjenigen, die auf der Konstanz des Gewichtes beruhen. Und eine genauere Übereinstimmung kann erzielt werden, wenn man mit den erwähnten Mitteln den Isochronismus der kleinen Pendelschwingungen erkannt hat und nunmehr dieses Prinzip als Grundvoraussetzung der Konstruktion von Pendeluhren zugrunde legt.
2. Die astronomischen Beobachtungen veranlassen uns, gewisse Intervalle, in denen sich fast periodische Bewegungserscheinungen vollziehen, für gleich

zu halten; z. B. die Konstanz des Sterntages, des Monats, des Jahres usw. anzunehmen.

Und die verschiedenen auf diese Weise erhaltenen Messungskriterien stimmen ziemlich genau mit der Messung der irdischen Uhren und noch genauer untereinander überein; außerdem kann die erreichte Übereinstimmung immer noch genauer gemacht werden durch Anbringung geeigneter Korrektionen gemäß dem fundamentalen Postulat.

Es ist ja bekannt, daß der Genauigkeitsgrad der erwähnten Verifikationen sich einer Grenze nähert, die praktisch der Strenge gleichkommt, und es ist auch nicht befremdend, daß sich bei den durch Uhren gelieferten Messungen kleine Abweichungen einstellen, wenn man die vielen Ursachen bedenkt, die ein Variieren der als gleich angesehenen Umstände bewirken: die wechselnde Temperatur, die den Fall des Wassers oder des Sandes durch eine kleine Öffnung und die Pendellänge beeinflußt, und deren Wirkungen man nicht gut kompensieren kann; die Ursachen, die die Schwerkraft an einem gegebenen Orte verändern können; die langsamen, neben den periodischen im Planetensystem auftretenden Veränderungen; ja selbst die Veränderung des astronomischen Universums, das wir als eine unveränderliche Bedingung betrachten!

Nachdem wir erklärt haben, welche Tatsachen bei der Zeitmessung vorausgesetzt werden, halten wir es noch für angebracht, zu bemerken, daß man durch nichts berechtigt wäre, sie für *notwendige Wahrheiten* zu halten. Wie soll man, wenn zwei Wasseruhren einmal sich gleichzeitig geleert haben, a priori ausschließen, daß bei einem anderen Versuch nicht die eine sich vor der anderen leert?

Gegen die Möglichkeit dieser Hypothese kann man auch nicht die *Evidenz* anführen, die das Postulat der

Zeitmessung begleitet. Diese Evidenz bezieht sich nämlich nur darauf, daß *das Postulat die notwendige Bedingung dafür ausdrückt, daß die Dauer mit anderen Sinnesdaten in dem Begriff einer Erscheinung verbunden werden kann;* aber das Stattfinden dieser Bedingung stellt gerade die experimentell erkannte Tatsache dar, um die es sich handelt: *die objektive Realität der Dauer.*

§ 8. Über die Unabhängigkeit der Zeit vom Orte.

Nehmen wir das im vorigen Paragraphen analysierte Postulat als gültig an; dann ist die Zeitmessung *an einem bestimmten Orte* so festgelegt, daß die Variable „Zeit" bis auf eine ganze lineare Substitution bestimmt ist:

$$\tau = a\,t + b.$$

Die Konstanten a und b hängen von zwei willkürlichen Wahlen ab, nämlich von der Wahl der Maßeinheit und der des Anfangsmomentes.

Um zwei Intervalle *an verschiedenen Orten* A, B zu vergleichen, bieten sich zwei Kriterien:

1. die *Übertragung* einer gegebenen Erscheinung im Raume gemäß dem Postulat der Zeitmessung; z. B. die Übertragung der Wasser- oder Pendeluhr, wobei auf die anzubringenden Korrekturen, z. B. die durch die Veränderung der Schwerkraft veranlaßte, zu achten ist.
2. die *Signalisierung* in B des Anfangs und des Endes einer sich in A abspielenden Erscheinung mittels des Lichtes oder der Elektrizität usw. Bei dieser Beurteilungsart verschwindet die Ausbreitungszeit, da sie nach dem Postulat des vorigen Paragraphen als konstant angesehen werden kann und die Entfernung zwischen A und B sich nicht ändert.

Daß die beiden Kriterien dasselbe Resultat über die Gleichheit von Zeitintervallen an verschiedenen Orten

ergeben, kann als Folgerung desselben Postulates angesehen werden, in Verbindung mit der geometrischen Grundvoraussetzung der Symmetrie in den Erscheinungen (Homogeneität des Raumes), aber nur unter der Bedingung, daß *A* und *B* sich in ***relativer Ruhe*** befinden, und wenn festgestellt ist, daß die Intensität der Erscheinung keinen Einfluß auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit hat.

Denken wir uns eine doppelte gegenseitige Signalisierung von *A* nach *B* und von *B* nach *A*, z. B. mit Hilfe des Lichtes; die beiden Ausbreitungszeiten müssen unter gleichen Bedingungen aus Symmetriegründen als gleich betrachtet werden. Wir besitzen dadurch ein Mittel, direkt die Ausbreitungszeit zu messen, die von *A* nach *B* gebraucht wird, in allen Fällen, wo das Signal nach *A* reflektiert werden kann; es genügt das zwischen dem Abgehen und der Rückkehr der Licht-, Elektrizitäts- usw. -welle verflossene Intervall zu halbieren.

Auf diesem Prinzip beruht die Messung der Lichtgeschwindigkeit, wie sie durch die Versuche FOUCAULTS bewerkstelligt wurde.

Nun ist klar, daß wir dadurch imstande sind, die Gleichzeitigkeit an verschiedenen Orten immer unter der Voraussetzung relativer Ruhe theoretisch beliebig genau festzustellen.

Wohl verstanden stellt die Übereinstimmung der verschiedenen Urteile, die man auf diese Weise erhalten kann, eine Tatsache dar; aber die Voraussetzung derselben muß als in dem Postulat der Zeitmessung enthalten angesehen werden.

Auf Grund dieses fundamentalen Postulates ist also folgendes möglich:

1. die Gleichheit zweier Intervalle an verschiedenen Orten *A* und *B* zu beurteilen;

2. die Gleichzeitigkeit zweier Erscheinungen an verschiedenen Orten zu beurteilen,

voraus gesetzt, daß A und B sich in relativer Ruhe befinden.

Das genügt, *die numerische Darstellung der Zeit, di für einen Ort hergestellt ist, auf jeden anderen zu übertragen, der sich zu A in relativer Ruhe befindet.*

Darin besteht die *Unabhängigkeit der Zeit vom Orte.* Aber es handelt sich um eine *relative Unabhängigkeit.*

Wenn die Lage von B in bezug auf A sich verändert, d. h. wenn die Entfernung $A\,B$ wächst oder abnimmt, so erlaubt das Kriterium der (optischen, elektrischen usw.) Signalisierung nicht mehr die Gleichzeitigkeit der Anfangsmomente festzustellen; wenn man einfach dieses Kriterium anwenden würde, als ob A und B fest wären, so würde sich in der Darstellung der Zeit eine *additive Lokalkonstante* finden, die man nur entdecken könnte durch Anwendung des anderen Kriteriums der Übertragung einer Uhr von A nach B.

Aber mehr noch. Unter den angenommenen Umständen würde das Kriterium der Signalisierung nicht einmal hinreichen, die Gleichheit zweier Intervalle an Erscheinungen festzustellen, die sich bzw. in A und in B abspielen; die Zeit wird also auch noch mit einer *multiplikativen Lokalkonstante* behaftet sein.

Kurz *wenn es sich um Orte handelt, die zueinander in relativer Bewegung begriffen sind und es unmöglich ist, eine Uhr vom einen an den anderen zu bringen, so ist die Zeit nur bis auf eine lineare Substitution*

$$\tau = a\,t + b$$

bestimmt, wo a und b lokale Konstanten sind, die von der relativen Geschwindigkeit abhängen.

Dieser Gedanke der *Ortszeit* spielt eine wichtige Rolle in der elektromagnetischen Theorie von LORENTZ und

in den neuesten Arbeiten POINCARÉS, auf die wir im Kap. VI zu sprechen kommen werden.

§ 9. Historische Entwickelung und Evidenz der Prinzipien.

In seinem klassischen Werke „Die Mechanik in ihrer Entwickelung"[1]) unterwirft E. MACH die geschichtliche Entwickelung der mechanischen Begriffe und Prinzipien einer gründlichen Untersuchung, indem er die besonderen Probleme anführt und untersucht, aus denen sie entstanden sind und durch die sie ihre bestimmte Form erhalten haben.

Aus dieser Darstellung, auf die wir uns im folgenden mehrfach werden beziehen müssen, geht hervor, daß bis zu einem gewissen Punkte die Gesamtheit der Experimente und Überlegungen, aus denen die *Statik* entstanden ist, sich von denen, die zu der *Dynamik* geführt haben, unterscheiden läßt. Die erste entsteht zum Teil bei den griechischen Mathematikern, vor allem bei ARCHIMEDES, und entwickelt sich in der Neuzeit weiter durch STEVIN, VARIGNON, GALILEI usw. bis zu NEWTON. Die zweite ist eine gänzlich moderne Wissenschaft, deren Begründung mit den Namen GALILEI, HUYGHENS und NEWTON verknüpft ist. Als Übergang von der einen zu der anderen scheint uns der Versuch der *kinematischen Konstruktion* des DESCARTES Erwähnung zu verdienen.

Die Geschichte des Gedankenfortschrittes liefert uns lehrreiche Einsichten, indem sie uns die stufenweise erweiterte Anwendung der Begriffe zeigt, und indem sie uns ferner zeigt, wie der im besonderen Falle angestellte Versuch der Anlaß wird, daß man Assoziationen der Sinnesdaten erkennt und befestigt, die man zum Teil einer vorangegangenen instinktiven Geistesarbeit der

1) Zitiert auf S. 354.

Koordination der gewohnteren Beobachtungen und Versuche zuschreiben kann. Wenn der menschliche Geist zu einer solchen Erkenntnis gelangt, so hat er den Eindruck, als ob er unabhängig von der Erfahrung eine allgemeine *Entdeckung* macht, die ein anderer als *evidentes Prinzip* annehmen wird.

Man legt heute von verschiedenen Seiten und mit Recht Nachdruck auf diesen Punkt, daß nämlich „die Evidenz der Prinzipien keinen Beweisgrund *a priori* gegen mögliche Erfahrungen abgibt"; und wir haben keinen Grund, auf eine Frage zurückzukommen, die auf dem Gebiete der Geometrie hinreichend erörtert worden ist.

Aber, wie uns scheint, geht man zu weit auf diesem Wege und unterschätzt die Bedeutung der *anschauungsmäßigen Evidenz*, indem man auf die *Irrtümer* hinweist, zu denen sie geführt hat, ohne zu bedenken, daß diese durch eine richtigere *Interpretation* haben verbessert werden können. Mit demselben Rechte könnte man auch das direkte Experiment gering achten, weil es uns nicht vor den Gefahren einer irrtümlichen Deutung bewahrt.

Wenn es nun auch nicht zweifelhaft sein kann, daß die anschauungsmäßige Evidenz in einem etwaigen Konflikt hinter den kritisch gesichteten Aussagen des Experimentes zurückstehen müßte, so möchten wir doch hervorheben, daß in Wirklichkeit solche Konflikte niemals mit einer wirklichen Verwerfung der Anschauung geendet haben, sondern daß diese gezwungen worden ist, ein weiteres Feld von Sinnesdaten zu umfassen und so den scheinbaren Widerspruch zu beseitigen.

Diese Überlegungen passen sehr gut auf den Fall der mechanischen Vorstellungen.

Die Verächter der Anschauung weisen auf den Umstand hin, daß gewisse von uns für evident gehaltene Prinzipien den Ansichten unserer ältesten Vorfahren direkt widersprechen. Kein Argument scheint geeigneter,

die Ansicht als unwiderleglich zu erweisen, nach der die Evidenz nichts mit einer *psychologischen Entwickelung* nach bestimmten Gesetzen zu tun hat, sondern nur auf einer *geschichtlichen Grundlage beruht;* es sei denn, daß man eine Veränderung des menschlichen Geistes annehmen wollte, eine Annahme, bei der zu verweilen, sich nicht der Mühe lohnt.

Ein überzeugendes Beispiel in diesem Sinne scheint das *Trägheitsgesetz* zu bieten, von dem wir hier nur den geometrischen Teil, nämlich „die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes, auf den keine Kräfte wirken", in Betracht ziehen. Wenn, wie heute behauptet wird, dieses Prinzip in einem später genauer anzugebenden Sinne an der Evidenz der *geometrischen Symmetrien* teilhat, wie konnten die Griechen es verkennen? Wie konnten sie auf den Gedanken kommen, daß die *natürlichen* Bewegungen kreisförmig seien?

Nun wohl, der Widerspruch muß dahin gedeutet werden, daß unsere Vorstellung und die der Griechen sich nicht auf denselben „mechanischen Raum" beziehen. In der Reihe der Assoziationen und Abstraktionen, durch die, wie wir sahen, der geometrische Begriff des Raumes sich gebildet hat, war es notwendig, die Dissymmetrien der verschiedenen physiologischen Räume in bezug auf den Beobachter zu eliminieren. Nun wurde in der Geometrie der allgemeine Gesichtspunkt durch die optischen Vorstellungen gewonnen, indem man von der systematischen Dissymmetrie abstrahierte, die die Schwerkraft in die Daten des Tastmuskelsinnes einführt. Aber bei der ergänzenden Entwickelung der Raumvorstellung, bei der die Bewegung auf der Erdoberfläche berücksichtigt wird, kommt durch die Erdrotation eine neue Dissymmetrie hinein, so daß das erste Ergebnis der Abstraktion und Assoziation aus den „physiologischen mechanischen Räumen" eine *geozentrische Vor-*

stellung ist. Um diese Stufe zu überwinden und zu dem Grade der Abstraktion vorzudringen, der dem der Geometrie entspricht, muß man sich bei der Betrachtung des Universums von der geozentrischen Auffassung befreien, und es ist allgemein bekannt, wie die Begründer der Dynamik dazu geführt wurden, als die Fortschritte der Astronomie das Kopernikanische System zu bestätigen begannen.

Es ist für unseren Zweck von Nutzen zu bemerken, daß in der geozentrischen Vorstellung der Griechen die Hypothese der Kreisbewegung eine Vereinfachung der astronomischen Tatsachen darstellt, wiewohl man versuchte, sie durch die behauptete *Vornehmheit* des Kreises im Vergleich zu allen anderen Linien zu rechtfertigen!

Demjenigen, der den erfahrungsmäßigen Ursprung der anschauungsmäßigen Erkenntnisse erkannt hat, mag es unsinnig erscheinen, denselben in der Anordnung der Wissenschaft einen gewissermaßen bevorzugten Platz anzuweisen; das Vertrauen, das wir auf sie setzen, mag es auch psychologisch erklärbar sein, wird jedenfalls einen Grund des Mißtrauens abgeben bei der Gegenüberstellung mit den willkürlich weiter verfolgten und mit Bewußtsein kritisierten Experimenten. Aber die Dinge erscheinen unter einem anderen Gesichtspunkt, wenn man bedenkt, daß diese Erfahrungen und diese Kritik, wenigstens in einer ersten Entwickelungsperiode, leicht unvollständig und einseitig bleiben, während die unbewußte Verarbeitung der Sinnesdaten eine größere Mannigfaltigkeit der in verschiedenen Beziehungen wiederholten Vergleichungen aufweist. Daher hat die anschauliche Erkenntnis einen höheren Wahrscheinlichkeitswert als die experimentelle, *falls* alle beide sich *auf die gleiche Art von Relationen beziehen.* Umgekehrt hat bei der Abgrenzung des Anwendungsgebietes und bei

seiner fortschreitenden Erweiterung die willkürliche Erfahrung vor der Anschauung den Vorrang.

Ohne daher zu beanspruchen, daß alle wissenschaftliche Erkenntnis schließlich anschauliche Form annehmen müßte, muß man doch lebhaft wünschen, daß die experimentellen Fortschritte eine entsprechende Weiterentwickelung der anschaulichen Vorstellungen veranlaßt, so daß durch sie die neuen Tatsachen mit der großen Masse der älteren anschaulichen Erkenntnisse mit Hilfe erweiterter Begriffe vereinigt werden. Diese Vereinigung bietet eine Gewähr dafür, daß sich in den verschiedenen Teilen unseres Wissens keine Widersprüche finden, denn gewisse Assoziationen und Abstraktionen, die tatsächlich stattgefunden haben, wären dadurch verhindert worden.

Diese Überlegungen lassen uns erkennen, daß der in der Geschichte der Mechanik mehrmals wiederholte Versuch, diese Wissenschaft auf evidente Prinzipien zu begründen, nicht unangebracht ist.

Man täte nur unrecht, diese Evidenz zu übertreiben, sei es, indem man sie als Notwendigkeit a priori auf Grund von metaphysischen Argumenten auslegt, sei es, indem man sie über ihr eigentliches Gebiet hinaus anwendet.

Der erwähnte Versuch führt vor allem dazu, eine *erste Art von Prinzipien* herauszuheben, *die sich als die angenommene Grundlage einer abstrakten Darstellung der mechanischen Daten herausstellen, in der diese den Begriffen von Zeit und Raum untergeordnet* werden, und daraus gerade ihre *Evidenz* ziehen.

Aber diese evidenten Postulate, die die Voraussetzungen der Statik und der Kinematik darstellen, genügen nicht zur Begründung der Dynamik. Man muß vielmehr noch Hypothesen *hinzufügen*, die direkt durch Experimente nahe gelegt werden und die zwar mit einigen anschaulichen Vorstellungen zusammenhängen, im ganzen aber

nichts Evidentes an sich haben. Hier erklärt sich vor allem das, was an unserer wissenschaftlichen Konstruktion willkürlich ist, aus der *geschichtlichen Entwickelung.* Demgegenüber gestattet die *psychologische Erklärung der geschichtlichen Entwickelung* nicht, eine indifferente Determination der ersten Prinzipien anzunehmen, ob sie sich gleich teilweise und allmählich beim Studium spezieller Probleme enthüllt haben.

§ 10. Die Grundbegriffe.

Die Entwickelung der Mechanik beleuchtet neben den Begriffen des Raumes und der Zeit die Grundbegriffe: *materieller Punkt, Kraft, Bewegung, Masse und Verbindung.*

Die genannten Begriffe treten im allgemeinen in Verbindung mit gewissen Vorstellungen auf, und wenn man das subjektive Element eliminiert, so bleibt eine Gesamtheit von Beziehungen, die sich als *implizite Annahmen* herausstellen. Die Prinzipien der Mechanik im eigentlichen Sinne stellen zwischen den Begriffen Relationen her, die die *expliziten Hypothesen der Mechanik* darstellen.

Diese Relationen erlauben formal einige jener Begriffe durch die übrigen zu definieren. Diese Reduktion wird von einigen so weit getrieben, daß sie zu einer *nominalistischen Deutung* der Mechanik führt.

§ 11. Mathematischer Nominalismus.

Die Tendenz zum Nominalismus, die heute auf allen Gebieten der theoretischen Physik herrscht, verdient eine gesonderte Betrachtung.

Diese Tendenz stellt in gewissem Sinne die Gefahr dar, die mit den Vorteilen einer immer weiter ausgedehnten Anwendung der Mathematik verbunden ist.

Ihre bestimmende Ursache ist im besonderen eine unberechtigte Anwendung der formalen Kriterien der Kritik, die einen *falschen Begriff von wissenschaftlicher Strenge* zu erzeugen scheint.

Die *physikalische Strenge* erfordert, daß die Erkenntnisse auf eine möglichst große Zahl von Tatsachen gestützt werden, die ihrerseits durch möglichst mannigfache Proben kontrolliert werden, und daß die festgestellten Relationen immer von einem Verzeichnis von experimentellen Daten begleitet sind, aus dem man den *Genauigkeitsgrad* entnehmen kann, mit welchem man sie für gesichert halten darf.

Eine mathematische Darstellung der physischen Wirklichkeit, die diesen Erfordernissen genügte, würde durch eine *Approximationsanalyse* geliefert werden, wie sie Gegenstand der interessanten Überlegungen Robins war. Aber im allgemeinen erweist es sich als nützlich, ja zuweilen kann man sogar sagen als notwendig, rascher zu einer vorläufigen Abstraktion von einer gewissen Gruppe von empirischen Daten vorzugehen, indem man diejenigen Relationen als *Postulate* ausspricht, von denen man annimmt, daß sie in ihrer einfachen und genauen Form *den wesentlichen Teil* der wirklichen Beziehungen ausdrücken, so daß man die aus den kleinen vernachlässigten Abweichungen entstehenden Fehler auf die ganze Theorie wirft.

Eine so gebildete Theorie kann eine wohldefinierte begriffliche Form annehmen, so daß in ihr die deduktive Entwickelung streng vor sich geht, ohne den Inhalt der Hypothesen zu verändern. Aber verglichen mit der Wirklichkeit, liefert diese Theorie immer nur eine angenäherte Darstellung; die Postulate sind mit einem Fehler behaftet, den nur neue Beobachtungen und Versuche korrigieren können, indem sie die angenommenen Hypothesen modifizieren.

Die Strenge erfordert nun, daß diese Fehler in jedem Stadium der wissenschaftlichen Entwickelung möglichst genau abgeschätzt werden, indem man eine Grenze für sie angibt, aber vor allem dürfen sie nicht verborgen werden, darf die formale Geschlossenheit der Theorie nicht über den approximativen Charakter der in ihr enthaltenen Erkenntnisse hinwegtäuschen.

Ist es möglich, daß ein logischer Fortschritt in der Kritik der Definitionen und Postulate diese Fehler beseitigt oder vermindert?

Die Frage selbst muß demjenigen sinnlos erscheinen, der die Bedeutung der vollzogenen Abstraktion begriffen hat. Sie hat uns gestattet, das Problem in zwei Teile zu spalten, einen nach Voraussetzung einfachen und einen anderen, der zwar unbegrenzt kompliziert ist, der aber auf die wirkliche Voraussage einen verhältnismäßig geringen Einfluß ausübt. Es bleibt demnach dem Theoretiker volle Freiheit, die hypothetischen Voraussetzungen gemäß seinen Zwecken der mathematischen Behandlung umzuformen, nur darf er nicht den Anspruch erheben, damit der Theorie größere physikalische Strenge zu verleihen.

Immerhin kann er die Zahl der Postulate, die diese Voraussetzungen ausdrücken, vermindern; und das ist sehr leicht. Jene Postulate stellen sich nämlich dar unter der allgemeinen Form von Gleichungen zwischen Größen, die man sich durch gewisse Messungsmethoden definiert denkt. Es wird also genügen, eine derartige Gleichung als *Definition* einer dieser Größen an Stelle der entsprechenden Messung anzunehmen. Dadurch wird an die Stelle einer Reihe von notwendig ungenauen Versuchen ein Akt freier Konvention gesetzt, der einen genauen logischen Sinn hat. Damit ist also aus der Theorie eine Fehlerquelle beseitigt, weil die Tatsache selbst, auf die der Fehler sich bezog, eliminiert ist.

Ein derartiges Verfahren kann im Hinblick auf spezielle Zwecke in manchen Fällen gerechtfertigt werden. Z. B. wenn es sich darum handelt, festzustellen, welche Änderungen man in einem System von Hypothesen, denen man eine gewisse Rangordnung zuschreibt, einführen muß, wenn eine bestimmte *Form* als Grundvoraussetzung angenommen wird, von der man glaubt, daß sie einen genaueren Inhalt aufzunehmen imstande ist. Dadurch erhält man ein Verfahren der Diskrimination der vorausgesetzten Tatsachen, durch das eine Theorie entsteht, die um so weniger ausdrückt, je schmiegsamer sie ist.

Aber auch im eingeschränkten Sinne kann man eine vollkommene Theorie nie erreichen!

Man versuche nämlich einmal, alle Postulate in einfache Definitionen umzuwandeln. Dann ist zwar jeder Irrtum ausgeschaltet, aber auch jede wirkliche Erkenntnis; die absolute Strenge der so rein formal konstruierten Theorie reduziert sich auf eine Sinnlosigkeit!

Es ist auch nicht einmal anzunehmen, daß der mathematische Theoretiker aus einer solchen Umformung irgendeinen Vorteil ziehen könnte.

Für ihn gab es nur Gleichungen, die nach den genauen Regeln der Analysis analytisch zu behandeln waren. Nur wußte er, daß diese Gleichungen unvollkommen verifizierte Hypothesen darstellten, und es gelang ihm, diese Unvollkommenheit vor seinen eigenen Augen zu verbergen. Die Freiheit seiner mathematischen Ableitungen bleibt, wie vorher, theoretisch uneingeschränkt; aber er hat sich eines Gesichtspunktes beraubt, der ihm vorschrieb, wie er seine Untersuchungen einem physikalischen Zweck anpassen konnte.

Die Nachteile eines solchen Verfahrens erscheinen schwerwiegender, wenn man auf die Vergleichung von Theorie und Erfahrung bei den Verifikationen und kon-

kreten Anwendungen sieht. Mangels einer vorangehenden Kritik dessen, was die Theorie wirklich bedeuten will, läuft man Gefahr, ein Maß von *praktischer Strenge* anzunehmen, das zu der ängstlichen theoretischen Genauigkeit in scharfem Gegensatz steht, indem man nämlich die Größen, die in der Rechnung als irgendwie experimentell bestimmt erscheinen, ohne Vergleichung einsetzt; und schließlich, indem man die theoretische Konstruktion auf verschiedene nicht streng voneinander getrennte Arten deutet, je nach den Tatsachen, die man im Augenblick rechtfertigen will.

Ist es dieses Ergebnis, das diejenigen erreichen wollen, die eine absolute Strenge erstreben?

Gewiß nicht! Aber sie scheinen sich nicht bewußt zu sein, daß dies die unvermeidliche Folge des Nominalismus ist, zu dem eine unvollständige Ansicht von der Wissenschaft und ein transzendentaler Anspruch führen.

Gemäß der vorstehenden Kritik wollen wir nunmehr die Grundbegriffe der Mechanik analysieren, indem wir die verschiedenen in ihnen enthaltenen impliziten und expliziten Hypothesen herausstellen, und zwar besonders die ersteren, die häufig in der psychologischen Entwickelung dieser Begriffe als Bedingungen für die Verbindung der empirischen Daten zu abstrakten Vorstellungen erscheinen.

§ 12. Der Massenpunkt.

Obgleich die in der Statik zuerst wirklich behandelten Probleme verhältnismäßig kompliziertere *Systeme*, wie den *Hebel*, die *Rolle*, die *schiefe Ebene* betreffen, so erscheint es doch, wenn man die weiteren Entwickelungen betrachtet, angebracht, das Studium der Mechanik mit den „*Massenpunkten*“ als einfachstem Falle zu beginnen.

Eine derartige Fiktion wird vollständig gerechtfertigt als Anwendung der Mittel für die Vereinfachung der wissenschaftlichen Forschung, die P. Volkmann als Prinzipien der *Isolierung* und der *Superposition* der in der Erscheinung auftretenden Umstände charakterisiert. Es ist deshalb wichtig, sich einen Augenblick bei der Aufklärung des Begriffes „Massenpunkt" aufzuhalten.

Vorher wollen wir jedoch darauf aufmerksam machen, daß man diese Fiktion entbehren kann. G. A. Maggi hat nämlich in seinen „Principii della teoria matematica del movimento dei corpi"[1]) gezeigt, daß man die ganze Mechanik der ausgedehnten Körper begründen kann, ohne den Körper als ein System von Punkten aufzufassen.

Dieses Ergebnis, das von philosophischem und mathematischem Interesse ist, mußte angeführt werden, obwohl es uns aus verschiedenen Gesichtspunkten angebracht erscheint, der Vorstellung des Massenpunktes eine Stelle einzuräumen, und zwar vor allem aus folgenden Gründen:

1. Für viele Überlegungen kann ein Körper als „Punkt" angesehen werden, indem man einen Fehler macht, der unterhalb der Grenze der in Betracht kommenden *physikalischen Genauigkeit* bleibt; und wie weit auch immer diese Grenze vorgeschoben werden mag, es wird doch immer Körper geben, die in bezug auf irgendwelche Erscheinungen ohne merklichen Fehler als „Punkte" werden betrachtet werden können. In solchen Fällen erscheint die Forderung, den unmerklichen Fehler zu beseitigen, indem man sich nach einem *mathematischen* Kriterium der Genauigkeit richtet, wenig am Platze, wenn sie, wie hier, zu einer komplizierteren Darstellung führt.

1) Mailand, 1896.

2. Die Darstellung der Körper, als aus Elementen oder „Massenpunkten" gebildet, ist in der theoretischen Physik von so ausgedehnter Anwendung, daß man nicht ohne Opfer darauf verzichten kann.

Aber die Schwierigkeiten, die in dem Begriffe des „Massenpunktes" liegen, dürfen nicht mit Stillschweigen übergangen werden.

Unter welchen Bedingungen ist es zulässig, einen Körper als Massenpunkt zu behandeln?

Die erste Bedingung, die man gewöhnlich im Auge hat, ist, daß seine Dimensionen *hinreichend klein sind gegen die, deren Beziehungen man betrachtet.* Auf Grund hiervon kann ein Sandkorn beim Studium der Bewegung auf der Erde ebensogut wie bei den himmlischen Bewegungen ein Stern als Punkt betrachtet werden.

Aber zu dieser Bedingung kommt eine andere hinzu, nämlich, *daß die Stellung des um einen seiner Punkte beweglich gedachten Körpers für die betrachteten Erscheinungen indifferent ist.* Deshalb kann eine kleine Quelle polarisierten Lichtes, die einem Flächenelement angepaßt werden kann, inbezug auf optische Erscheinungen nicht als Punkt betrachtet werden.

Wir werden die Bedeutung dieser Betrachtungen für die Kritik einiger Grundbegriffe später einsehen.

Wir werden nunmehr so vorgehen, daß wir nacheinander erst die *Statik* und dann die *Dynamik des Punktes* behandeln, um dann zu den *Systemen* überzugehen.

§ 13. Die Kraft.

„Die Kraft ist die Ursache oder die Wirkung der Bewegung."

Diejenigen, die diesem Urteil die Bedeutung einer *Definition der Kraft* zuschreiben, sind verantwortlich für die Begriffsverwirrung, auf Grund deren viele den Kraftbegriff für einen *metaphysischen* im schlechtesten

Sinne des Wortes halten, in dem es so viel wie „sinnlos“ bedeutet.

Die Aussage nämlich, daß etwas die Ursache von etwas anderem ist, hat gar keinen Sinn, wenn es sich nicht darum handelt, die Verknüpfung einer gesetzmäßigen Sukzession zu erkennen zwischen zwei Erscheinungen, die als solche schon durch Wahrnehmungen definiert sind.

Die Existenz einer *Kraft* ist eine *physikalische Tatsache*, die durch *Empfindungen der Anstrengung oder des Druckes* festgestellt wird. Unter diesem Gesichtspunkt hat die Kraft nichts Geheimnisvolles oder Metaphysisches, oder wenigstens nicht mehr als die Bewegung oder irgendeine andere Erscheinung, deren Realdefinition in letzter Linie immer in einer Gruppe von Empfindungen besteht, die sich unter gewissen willkürlich hergestellten Bedingungen einstellen.

Wenn diejenigen, die den Kraftbegriff aus der Mechanik verbannen wollen, diese Absicht bis zu einem gewissen Grade mit dem Zweck rechtfertigen können, die ersten Daten der Wissenschaft von der Bewegung möglichst einzuschränken, so sind sie doch durch nichts zu der Behauptung berechtigt, daß dieser Begriff weniger leicht denkbar sei als irgendein anderer geometrischer oder kinematischer, oder daß seine *Erklärung* größere Schwierigkeiten machte. Denn ein physikalischer Begriff wird immer dadurch erklärt, daß man seinen Wahrnehmungsgehalt aufzeigt.

Jedenfalls sind die Versuche, den Kraftbegriff zu eliminieren, ein Ausfluß des Bestrebens, an Stelle der *muskularen Erklärung* der Erscheinungen eine *optische* zu setzen, sei es in einem allgemeinen Sinne durch die Annahme von fiktiven Dingen (vgl. Kap. VI), sei es innerhalb des engumschriebenen Gebietes der Himmelsmechanik, wo die Erscheinungen sich unmittelbar dem Gesichtssinn darbieten.

Auf diesem Gebiete erscheinen allerdings die muskularen Daten als eine Annahme, die so mancher verspottet, indem er den anthropomorphen Charakter der NEWTONschen Anziehungskraft hervorhebt; setzt vielleicht die Anziehung zwischen Erde und Mond und zwischen Erde und Sonne Muskelempfindungen bei diesen Körpern voraus?

Aber wenn man den Scherz beiseite läßt, so wird man nichts Lächerliches in der Annahme finden, daß ein auf der Erde befindlicher Mensch Muskelempfindungen verspürt, die der Anziehung des Mondes oder der Sonne entsprechen; die erste zeigt sich uns in den Gezeiten und die zweite kann durch feine Versuche in einer Modifikation der Schwerkraft nachgewiesen werden. Es findet nämlich eine Lotablenkung statt, die in den 24 Stunden bis auf 2″ steigt und welche kürzlich von S. NEWCOMB und v. STERNECK gemessen und in Übereinstimmung mit der theoretischen Voraussage als Wirkung der Sonnenanziehung nachgewiesen wurde. Es ist zu beachten, daß die Annahme von Muskelempfindungen auch für einen außerhalb der Erde befindlichen Menschen ihren Sinn behält, wenn sie auch praktisch nicht verifizierbar ist.

Jedenfalls kann man eine astronomische Dynamik aufstellen, die auf die Daten des Gesichtssinnes beschränkt ist, und aus der der Kraftbegriff verbannt ist. Es genügt dazu, (mit MACH) das NEWTONsche Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung als eine Beziehung zwischen den *Beschleunigungen* der bewegten Massenpunkte zu betrachten, in die gewisse Koeffizienten eingehen (die *Massen*).

Aber wenn es auch interessant sein mag, auf diese Weise eine kinematische Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper zu erhalten, die von der Statik unabhängig ist, so darf man sich doch nicht über den ziemlich begrenzten Wert derselben täuschen, und besonders

nicht darüber, daß sie eine Theorie der Gravitation liefert, in welcher der Fall der Körper auf der Erde von dem Gewicht getrennt wird und wo z. B. die verifikatorischen Experimente von CAWENDISH keine Stelle finden würden.

Was soll man von einer Ansicht sagen, die unsere Kenntnisse derart verstümmelt?

Nun muß man allerdings darauf aufmerksam machen, daß die oben wiedergegebene Betrachtung MACHS nicht darauf hinausläuft, den Begriff der Kraft systematisch durch eine Nominaldefinition zu ersetzen, indem man sie als das Produkt einer Masse in eine Beschleunigung ansieht. In diesem Sinne verfährt vielmehr die KIRCHHOFFsche Konstruktion der Mechanik. Und hier drückt die so eingeführte Kraft z. B. in der Elastizitätslehre nicht mehr den Wahrnehmungsgehalt dessen aus, was wir auf diesem Gebiete als „Spannung" darstellen.

Während hinsichtlich der Astronomie die optische Behandlung der Mechanik unter einem gewissen Gesichtspunkt gerechtfertigt werden konnte, so hat die Ausdehnung dieses Verfahrens auf eine allgemeine Mechanik überhaupt keine Grundlage, wenn man die die Kraft betreffenden Vorurteile und jene Gründe beseitigt, welche den mathematischen Nominalismus zwar erklären, aber nicht wirklich annehmbar machen (vgl. § 11).

Die vorstehenden Betrachtungen veranlassen uns, den Begriff der Kraft als einen Grundbegriff der Mechanik anzusehen.

Der anfängliche Sinn der *Kraft* wird bestimmt durch die *möglichen Muskelempfindungen* der Anstrengung und des Drucks *in einem gegebenen Bezugsystem und unter gewissen Bedingungen.*

Dieser Sinn wird präzisiert durch Anwendung von geeigneten Instrumenten und *erweitert* durch die Annahme, die sich an den Begriff des *Kraftfeldes* knüpft.

Ein Kraftfeld wird als *gegeben* angesehen (in bezug auf gegebene Körper und Erscheinungen, die es definieren), wenn man als möglich voraussetzt, in jedem Punkte des Feldes die Kraft zu bestimmen, die auf einen dorthin gebrachten Massenpunkt wirkt.

Es ist nun nötig, den Kraftbegriff näher zu bestimmen durch Analyse der damit verknüpten *Wahrnehmungsdaten.*

§ 14. Geometrische Daten der Kraft.

Die Empfindungen, die zu einer Kraft gehören, bestimmen:

1. eine *Richtung* und einen *Angriffspunkt*, d. h. einen *Strahl;*
2. eine *intensive Größe*, um deren genauere Bestimmung es sich handelt.

Dazu bedürfen wir vor allem des Begriffs von „*gleichen Kräften*, die verschieden gerichtet sind und an verschiedenen Punkten angreifen".

Die Vorstellung hiervon liefert uns zuerst, wenn auch wenig genau, die Vergleichung der Anstrengungs- und Druckempfindungen, die wir in verschiedenen Lagen empfinden können. Das Gleichheitsurteil zwischen zwei Kräften, das sie gestattet, wird ein genaueres durch Verbindung dieser Empfindungen mit physikalischen Daten, wie z. B. der Spannung oder der Zusammendrückung einer Feder oder eines elastischen Fadens usw., vorausgesetzt, daß diese Spannungen und Drucke, die mit gewissen beweglichen Körpern verbunden sind, merklich zwei Grundeigenschaften besitzen:

1. sich unverändert zu wiederholen (abgesehen von besonderen Komplikationen), wenn der Körper die ursprüngliche Form und Lage wieder annimmt;
2. übereinzustimmen für jede Lage der Körper, an die sie geknüpft werden, wenn sie dies für irgendeine tun.

Das Verfahren, durch das so die Vorstellung von „gleichen Kräften“ eingeführt wird, läuft übrigens parallel demjenigen, durch das in der Geometrie der Begriff der gleichen Figuren eingeführt wird, mit Hilfe der Bewegung starrer Körper, die gewissen Bedingungen der Invarianz in bezug auf das Tastorgan genügt.

Es ist nun zu bemerken, daß jede auf der Erde gegebene Kraft durch eine gleiche ersetzt werden kann mittels eines über eine Rolle geführten Fadens und eines daran aufgehängten Gewichtes; diese Ersetzung bietet den Vorteil einer leichten und einfachen Fixierung der Kräfte und liefert ein einfaches konkretes Bild der zu der Kraft gehörigen Elemente.

In der Tat waren die durch Gewichte erzeugten Kräfte die ersten, auf die die Begründer der Statik sich bezogen; als jedoch die fortgeschrittenen Bedürfnisse der Technik und die Entwickelung der Wissenschaft die Aufmerksamkeit auf andere Kräfte lenkten, erhielten die aufgestellten Prinzipien eine natürliche unmittelbare Erweiterung ihres Anwendungsgebietes.

Aus dem oben beschriebenen Bilde kann man die *Messung* einer Kraft und damit die Bestimmung ihres intensiven Bestandteiles durch eine Zahl oder eine Strecke ableiten.

Es genügt dazu nämlich, die Spannungen zu betrachten, die durch einen Faden ausgeübt werden, an dem man 1, 2, 3 ... *gleiche Gewichte* aufgehängt hat, indem man berücksichtigt, daß, wie man auch immer eine solche Messung der Kräfte (durch verschiedene schwere Massen usw.) vornimmt, man immer findet, daß „gleiche Vielfache von gleichen Kräften gleich sind“.

Die Versuche, die so das *(statische)* Maß der Kraft liefern, bilden einen Spezialfall von allgemeineren Versuchen, die man sich auch abseits der Erde ausgeführt denken kann.

„Mehrere Kräfte, die in derselben Richtung auf einen Massenpunkt wirken, können in bezug auf alle ihre Wirkungen (der Spannung, des Drucks usw.) durch eine einzige Kraft ersetzt werden, die man ihre *Summe* nennt." Und wenn man verlangt, daß die *statische Summe* von mehreren gleichgerichteten Kräften durch ihre *geometrische Summe* dargestellt wird, so folgt daraus, daß (abgesehen von einem von der Maßeinheit abhängigen Faktor) jeder Kraft eine nach Größe und Lage wohldefinierte *gerichtete Strecke* entspricht.

§ 15. Prinzipien der statischen Symmetrie.

Eine fortgeschrittene Idealisation liefert schon, wie wir gesehen haben, ein einfaches *geometrisches Bild* der auf einen Massenpunkt wirkenden Kraft. Nun folgen die ersten Prinzipien der Statik aus diesem Bilde mit solcher Evidenz, daß es einer Anstrengung bedarf, um in ihnen mehr als eine geometrische Erkenntnis zu sehen.

Es handelt sich um gewisse *Symmetrien* der im *Gleichgewicht befindlichen Kräfte*, die vor der Behandlung der ersten Probleme der Statik wie etwas bereits Bekanntes implizite angewandt werden:

1. Gleiche und entgegengesetzte Kräfte, die auf einen Punkt o wirken, halten sich das Gleichgewicht, und umgekehrt.
2. Wenn ein Massenpunkt A auf einen anderen Massenpunkt B eine Kraft ausübt, so wirkt diese in der Geraden AB und der Punkt B übt auf A eine gleiche und entgegengesetzte Kraft aus *(Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung)*.

Es ist dabei zu bemerken, daß diese Prinzipien leichten und alltäglichen Versuchen entsprechen, die sich allerdings (bei dem zweiten) auf den Fall von Zug durch Fäden oder Druck durch feste Körper beziehen.

Aber wenn wir uns von dem Grunde, auf dem sie beruhen, Rechenschaft zu geben suchen, so erhebt sich der Gedanke, daß sie nach dem Prinzip des zureichenden Grundes aus der Symmetrie der sie darstellenden Figuren folgen; nämlich im ersten Fall aus der Symmetrie in bezug auf die in o auf den beiden Kräften senkrecht stehende Ebene, im zweiten aus der Symmetrie des Raumes in bezug auf die Strecke AB und ihren Mittelpunkt (Unabhängigkeit von Drehungen um die Gerade AB und Umkehrbarkeit der Strecke).

Es wäre eine Täuschung, wenn man glaubte, hieraus einen *geometrischen Beweis* dieser statischen Prinzipien ableiten zu können. Obgleich die Beobachtungen und Experimente über die Kräfte und das Gleichgewicht sehr nahe mit denen verwandt sind, aus denen die Geometrie entsteht, so erfordern sie doch in Wirklichkeit etwas, das in der Vorstellung des physikalischen Raumes nicht notwendig enthalten ist. Immerhin ist der Inhalt dieser Vorstellung dehnbar und die vorstehenden Betrachtungen zeigen, daß er so erweitert werden kann, daß er auch die in Rede stehenden statischen Daten umfaßt.

Mit anderen Worten: die statischen Symmetrieprinzipien drücken bereits aus, daß „die geometrischen Bilder (die gerichteten Strecken) den Vorstellungen der Kräfte in bezug auf das Gleichgewicht adäquat sind". In dieser Form erscheint ihr Inhalt als eine *Bedingung der Möglichkeit* dieser Darstellung, an die sich ihre Evidenz knüpft.

§ 16. Zusammensetzung der Kräfte.

Die Summe zweier gleichgerichteter Kräfte ist nur ein Fall der „*Zusammensetzung der Kräfte*".

Ihr allgemeines Prinzip läßt sich in zwei Teile spalten, einen statischen und einen dynamischen:

1. Bei den Gleichgewichtserscheinungen können mehrere auf einen Punkt wirkende Kräfte durch eine einzige wohldefinierte Kraft (die *Resultante*) ersetzt werden, die *dem ganzen System äquivalent* ist.
2. Statisch äquivalente Systeme, die auf einen Punkt wirken, sind auch hinsichtlich ihrer dynamischen Wirkungen (Bewegungen) äquivalent.

Dieses letztere Postulat, das für die Dynamik der Systeme von D'ALEMBERT erkannt worden ist, stellt auch schon im Falle des einzelnen Punktes eine Annahme dar, die die Kritik untersuchen muß, die aber über das eigentliche Gebiet der Statik hinausgeht.

Die Entdeckung des Prinzips der Zusammensetzung der Kräfte ergab sich historisch auf induktivem Wege aus Einzelfällen: STEVIN gelangte dazu auf Grund der Zusammensetzung aufeinander senkrecht stehender Kräfte, die er indirekt erkannte. Später, d. h. nach den dynamischen Konstruktionen des GALILEI und NEWTON, gelang es VARIGNON die Zusammensetzung der Kräfte aus derjenigen der Bewegungen abzuleiten, indem er die Statik als Spezialfall der Dynamik behandelte.

Auf beiden Wegen wurde es in seiner konkreten Form *(Kräfteparallelogramm)* erkannt, und erst nach seiner Entdeckung kamen D. BERNOULLI und FONCENEX auf den Gedanken, es aus dem abstrakten Prinzip der Existenz der Resultante und den Symmetrieprinzipien abzuleiten. Diese Methode wurde von D'ALEMBERT und POISSON vervollkommnet und in unseren Tagen von BATTAGLINI, GENOCCHI, DARBOUX, SIACCI, ANDRADE in mannigfachen interessanten Untersuchungen wieder aufgenommen.

MACH bemerkt, daß es sich hier *nicht* um einen *geometrischen Beweis* handelt. Indem wir mit ihm in diesem Punkte übereinstimmen, können wir doch die Meinung nicht teilen, daß diese Art das Problem zu

behandeln als ein historischer und psychologischer Unsinn zu verwerfen sei. Wenn es auch Tatsache ist, daß die konkrete Regel der Zusammensetzung zweier Kräfte früher gefunden wurde und sich aus leichten Versuchen ergibt, so scheint uns doch anderseits, daß die stillschweigende Annahme der *Existenz einer Resultante* den Untersuchungen, die zu ihrer Bestimmung führen, als leitender Gedanke zugrunde liegen muß. Eine elementare Beobachtung zeigt uns nämlich tagtäglich, daß, wenn ein Punkt an mehreren Fäden gezogen wird, man, um Gleichgewicht herzustellen, auf ihn einen Zug in einer ganz bestimmten Richtung ausüben muß, genau als wenn der Punkt in der entgegengesetzten Richtung an einem einzigen Faden gezogen würde. Hier haben wir nun ein sehr einfaches Experiment, das in einem gewissen Sinne verglichen mit der quantitativen Bestimmung der Resultante als qualitativ betrachtet werden kann, und dem wir folglich eine größere Beweiskraft zuzuschreiben geneigt sind.

Man nimmt als physikalische Voraussetzung das *Postulat* an, daß „ein System von zusammenwirkenden Kräften statisch einer einzigen wohldefinierten Kraft (der *Resultante*) äquivalent ist“. Um diese Kraft zu bestimmen, muß man folgendes wissen:

1. Die Resultante kann bestimmt werden, indem man einige der sie zusammensetzenden Kräfte durch ein äquivalentes System ersetzt *(assoziative und kommutative Eigenschaft)*.
2. Geometrisch gleiche Kräftesysteme sind äquivalent und ergeben daher gleiche Resultanten.

Diese Prinzipien stellen ebensoviele physikalische Annahmen dar, aber sie stützen sich ebenso wie die Prinzipien der Symmetrie, deren Verwendung darauf beruht, auf die allgemeine Annahme, daß „die Kräfte in allen statischen Beziehungen durch ihre geometrischen

Bilder adäquat dargestellt werden". Dies ist auch der Grund ihrer Evidenz, die also eine erweiterte Koordination der verschiedenen Sinnesdaten in sich schließt.

Nicht mit Unrecht beruhigt sich unseres Erachtens der Verstand bei dieser Evidenz, denn sie schließt die Möglichkeit aus, die Experimente, welche das Prinzip bestätigen, zu korrigieren, ohne die allgemeine Ansicht von den statischen Beziehungen, welche durch Vergleichung von bewußten und unbewußten Beobachtungen und Experimenten entstanden ist, von Grund aus umzustürzen.

§ 17. Begründung der Dynamik.

Die geschichtliche Entwickelung der Dynamik von Galilei zu Huyghens und Newton läuft im wesentlichen auf zwei allgemeine Prinzipien hinaus: die Bewegungsgleichung eines Punktes und das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.

Versuchen wir uns Rechenschaft zu geben, in welcher Weise und in welchem Sinne diese Prinzipien in dem System Newtons bestimmt werden, und welche Hypothesen implizite in den durch sie verbundenen Begriffen liegen.

Die Bewegungsgleichung eines Punktes, die in den ersten beiden Gesetzen Newtons enthalten ist, drückt aus, daß die Kräfte den *Massen* und den durch sie hervorgerufenen Beschleunigungen proportional und mit diesen gleichgerichtet sind. Die vektorielle Formel lautet

$$f = m w.$$

Dadurch wird der kausale Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung, den die elementarsten Experimente erkennen lassen, quantitativ bestimmt, und es erscheint dabei ein Koeffizient m, der von dem Punkte abhängt.

Es ist gut, sich die Schwierigkeiten klar zu machen, die überwunden werden mußten, um zu der obenstehenden Formel zu gelangen.

Wir bemerken vor allem, daß die Kräfte, die im allgemeinen durch die Muskeln oder durch Spannen einer Feder erzeugt werden, wenn ihnen durch einen Widerstand das Gleichgewicht gehalten wird, von sehr kurzer Dauer sind und sich in einen *Impuls* umsetzen, der direkt durch die *Geschwindigkeit* des geworfenen Körpers gemessen wird.

Wenn es sich hingegen um eine dauernd wirkende Kraft handelt, z. B. um die Schwerkraft, so vollzieht sich ihre sinnliche Feststellung als Muskeleffekt in verschiedener Weise, für einen bewegten Körper, je nach der Geschwindigkeit, mit der die Hand ihn begleitet und die Bewegung aufhält. Dazu kommt noch der Einfluß der Reibung beim Zug auf der Erde, durch die die anziehende Kraft der Geschwindigkeit der Bewegung merklich proportional erscheint.

Aus alledem geht hervor, daß der erste Gedanke, den ein roher Empirismus eingeben mußte, auf das aristotelische Prinzip der Proportionalität von Kraft und Geschwindigkeit führen mußte. Erst eine eindringende Analyse konnte zu der Entdeckung führen, daß die Kräfte nicht mit der Geschwindigkeit, sondern mit den von ihnen hervorgerufenen *Beschleunigungen* zusammenhängen.

Wie ist nun diese Verbesserung zustande gekommen?

Hier liegt ein historisches Problem vor, das einer genaueren Untersuchung bedarf. Hat Galilei die Falschheit des aristotelischen Prinzips erkannt? Gewiß wird wenigstens in den Untersuchungen über den Fall der schweren Körper eine Kraft (die Schwerkraft) als *unabhängig von der Bewegung* betrachtet und erkannt, daß sie der Beschleunigung proportional ist.

Aber die Frage, mit der die Entwickelung des Kraftbegriffes selbst zusammenhängt, wird klar, wenn man sich an den Streit zwischen den Schulen des Descartes

und des LEIBNIZ erinnert über die Frage, „ob die Geschwindigkeit v oder ihr Quadrat als Maß der auf einen beweglichen Punkt wirkenden Kraft genommen werden muß".

Wir wissen heute, daß die Proportion des DESCARTES besteht, wenn man konstante Kräfte (f) betrachtet, die während einer gewissen Zeit (t) wirken, und die von LEIBNIZ, wenn man sich auf Kräfte bezieht, die auf einem gewissen Wege (s) des bewegten Punktes wirken. Die Größen

$$f t = m v$$

und

$$f s = m v^2$$

haben bzw. die Bezeichnungen „*Bewegungsgröße*" und „*lebendige Kraft*" erhalten; die erste mißt den *Impuls* der Kraft, die zweite die dem Körper zugeführte *kinetische Energie* ($2 E$) oder die geleistete *Arbeit*.

Wenn man die erste der obigen Gleichungen differenziert, so erhält man die NEWTONsche Fundamentalgleichung

$$f = m \frac{dv}{dt} = m w;$$

wenn man die zweite Gleichung differenziert, so erhält man eine andere Gleichung

$$f = \frac{dE}{ds},$$

die gleichfalls ein dynamisches Maß der Kraft liefert und als Ausgangspunkt für eine *energetische Dynamik* dienen könnte.

Die Fundamentalgleichung der Bewegung eines Massenpunktes

$$f = m w$$

faßt eine Reihe von Tatsachen zusammen, die ihr ihren eigentlichen physikalischen Sinn verleihen.

Dieser Sinn muß durch eine geeignete Interpretation bestimmt werden, für die folgendes erforderlich ist:

1. das Bezugsystem zu fixieren, in bezug auf das die Bewegung und die Kraft definiert sind;
2. den Koeffizienten m (die Masse) physikalisch zu definieren.

Galilei hatte bei der Untersuchung der Schwerkraft als Bezugsystem „die Erde" und als Maß der Masse „das Gewicht" genommen. Newton mußte, als er auf das Gebiet der Astronomie überging, diese Begriffe modifizieren, und suchte ihnen eine absolut allgemeine Grundlage zu geben, indem er zum Bezugsystem einen *absolut ruhenden Raum* und als Masse eine Zahl wählte, die dem Körper unabhängig von allen anderen zukommen sollte (das Produkt von Volumen und *Dichte*). Doch ergänzte er die mangelhafte Definition dieser Zahl durch Übertragung des *Prinzips der Wirkung und Gegenwirkung* aus der Statik in die Dynamik, indem er darin eine „*Beziehung zwischen den Beschleunigungen*" der in Bewegung befindlichen Punkte erblickte.

Eine transzendente Ansicht beherrschte den systematischen Begründer der Dynamik und ließ ihn Definitionen und Prinzipien in einer Form aufstellen, durch die sie streng genommen jede Bedeutung verlieren.

Aber es erhebt sich aus dem Werk Newtons eine neue Systematisierung der Prinzipien, wenn man versucht, durch eine geeignete Kritik die Voraussetzungen herauszuziehen, die in dem positiven Ausbau der Lehre enthalten sind, soweit er als allgemeiner Besitz bis auf unsere Tage unbestritten ist.

Eine solche Kritik wollen wir in den folgenden Paragraphen vornehmen, indem wir nacheinander folgende Punkte diskutieren:

1. die Arten, die Bewegung zu bestimmen, die Newton als eine absolute dachte und von der die dynamischen Gesetze gelten;

2. die Masse, die damit zusammenhängenden Postulate und ihre Beziehung zu dem NEWTONschen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.
3. das Grundgesetz der Bewegung eines Massenpunktes und speziell zwei Annahmen, die sich in ihm überlagert haben und von denen in der NEWTONschen Formulierung eine Spur übrig geblieben ist.

Endlich werden wir aus dieser Prüfung einige Schlüsse über die Prinzipien der Dynamik ziehen.

§ 18. Bewegung.

Der geometrische Begriff der Bewegung ist offenbar relativ.

Wenn eine Menge von Körpern gegeben ist, so sagt man, daß sie sich gegeneinander bewegen, wenn ihre gegenseitigen Entfernungen sich mit der Zeit verändern. Eine solche in bezug auf die verschiedenen Körper völlig symmetrische Definition erlaubt uns auf keine Weise zu unterscheiden, welche von den Körpern sich *wirklich* bewegen und welche in *Ruhe* bleiben. Ja, die unterstrichenen Worte bleiben ohne Sinn, wenn man sich nicht auf irgend etwas anderes bezieht.

Die Auswahl eines Körpers von unveränderlicher Form, den man als ruhend betrachten will, bedeutet also die Auswahl eines *Bezugsystems*, das vom geometrischen oder kinematischen Gesichtspunkt offenbar konventionell und willkürlich ist. Die *Wahrnehmung der Bewegung* eines beliebigen Gegenstandes entspricht zunächst einer persönlichen Auswahl dieses Bezugsystems: die Lageveränderungen der Gegenstände werden auf uns selbst bezogen. Man würde über diese physiologische Auffassung der Bewegung nicht hinausgehen, wenn der Anblick der Erscheinungen sich nicht in Übereinstimmung mit derjenigen Wahrnehmung änderte, die wir *Bewegung unserer selbst* nennen.

Durch Assoziation und Abstraktion aus den verschiedenen physiologischen Vorstellungen von der Bewegung ergibt sich die physikalische, bei der die Erde als Bezugsystem angenommen wird. Und diese Wahl drängt sich für das Studium der irdischen Erscheinungen jedem auf.

Wieviel Zeit mußte vergehen, bis der Mensch zu der Erkenntnis der Relativität in der Astronomie gelangte!

Und welch ein harter Kampf gegen eine in den Hirnen eingewurzelte Überzeugung, die man aus Mangel an Gründen mit Gewalt aufrechtzuerhalten suchte!

Schließlich hat aber doch die genauere Betrachtung der Bewegungen innerhalb des Sonnensystems allen die Wahl eines bequemeren Bezugsystems, nämlich der Sonne anstatt der Erde, aufgedrängt.

Und dennoch bewegt sich auch die Sonne selbst, und zwar außer in einer Rotation um sich selber in einer translatorischen Bewegung in bezug auf die Gesamtheit der entfernten Sterne.

Welcher von diesen soll nun als ruhend betrachtet werden, da sie doch ihre gegenseitige Lage verändern, wie aus der Vergleichung mit den ältesten astronomischen Beobachtungen und aus den neuesten spektroskopischen Untersuchungen nach dem DOPPLERschen Prinzip hervorgeht?

In Ermangelung eines Systems von Körpern, das vernünftigerweise allen anderen als Bezugsystem vorgezogen werden könnte, hat man der *absoluten Bewegung* eine von den Körpern unabhängige Bedeutung zuschreiben wollen; indem man sich den Raum als ein unveränderliches Bezugsystem dachte, sah man in der Bewegung eine Veränderung der Lage der Körper *in bezug auf diesen Raum.* Dies ist die von NEWTON angenommene transzendentale Auffassung.

Jedenfalls haben wir nicht nötig sie zu widerlegen, da wir in Kap. IV gesehen haben, daß es keinen Gegenstand gibt, der dem Worte „Raum“ entspräche.

Anderseits könnte angesichts der Fortschritte, die der kritische Gedanke seither gemacht hat, kein moderner Philosoph der in der obigen Weise definierten absoluten Bewegung eine Bedeutung zuschreiben.

Aber diese Definition kehrt in einer neuen Form wieder, wenn man (wie z. B. VOLKMANN) einen *Äther* postuliert, der das Weltall erfüllt, und in bezug auf den die Bewegung betrachtet wird. Wohlgemerkt muß man sich die Teile dieses Äthers in ihrer Lage zueinander unveränderlich denken.

Kann die Postulierung des Äthers auf diese Weise der absoluten Bewegung einen positiven Sinn verleihen?

Die Antwort erfordert die Diskussion einiger Tatsachenfragen. Es leuchtet ein, daß das Wort „Äther“, das an die Stelle von „leerer Raum“ gesetzt wird, nicht mehr besagt. Aber anders läge der Fall, wenn man annähme, daß der Äther die Bewegung der Materie durch Reibung verlangsamte, wenn man also im wesentlichen an Stelle des Trägheitsgesetzes ein Gesetz postulierte, wonach die Körper sich einem Grenzzustand relativer Ruhe näherten. Dann würde man diesen Grenzzustand als Bezugsystem nehmen, auf das die als absolut betrachtete Bewegung bezogen würde.

Jedoch dieser Hypothese fehlt es an einer tatsächlichen Unterlage.

Plausibler erscheint es, die „Bewegung in bezug auf den Äther“ als „Bewegung relativ zum Licht oder zu anderen elektromagnetischen Erscheinungen“ zu betrachten, indem man an ein Tatsachengebiet anknüpft, zu dem die *astronomische Aberration* gehört.

Wir behalten uns vor, im Kap. VI auf die Fragen zurückzukommen, die sich hier ergeben; aber vorläufig

wollen wir schon sagen, daß diese Aberration und die verwandten Erscheinungen nicht mehr erkennen lassen als die *Bewegung der Körper gegeneinander.*

Kehren wir also zur relativen Bewegung der Körper zurück.

Da man durch Vergleichung der einzelnen Körper nichts Festes finden kann, so liegt der Gedanke nahe, *aus ihrer Gesamtheit etwas Festes* abzuleiten. So bietet sich z. B. im Planetensystem ohne Willkür die Wahl des *Schwerpunktes* als festen Beziehungspunktes dar.

Man hat jedoch (bei der angenommenen Unendlichkeit des astronomischen Universums) Gründe zu der Annahme, daß *ein Schwerpunkt des Systems aller Himmelskörper* nicht existiert, d. h. ein Grenzpunkt der Schwerpunkte der verschiedenen Teilsysteme, der *von der Anordnung* der verschiedenen Körper *unabhängig* ist.

Wenn uns nun auch das astronomische Universum keine *Punkte* liefert, die wir vernünftigerweise als *fest* ansehen können, so führt uns doch eine einfache Beobachtung zur Bestimmung von *Richtungen, die in bezug auf die Gesamtheit der Körper fest oder beinahe fest sind.*

Die Beobachtung, auf die wir anspielten, ist die folgende:

Während der Fortschritt der optischen Hilfsmittel uns *immer weiter entfernte* Sterne entdecken läßt, *übersteigen* ihre *relativen Geschwindigkeiten*, soweit man aus den Veränderungen der Sehstrahlenwinkel und aus dem DOPPLERschen Prinzip schließen kann, *nicht gewisse* vergleichsweise niedrige *Grenzen.*

Erteilt man nun dieser Beobachtung den Wert eines allgemeinen *Postulates*, so folgt, daß *die Geraden, die entfernte Massenpunkte* (Sterne) *miteinander verbinden, mit dem Wachsen dieser Entfernung Richtungen sich nähern, die relativ zueinander unverändert bleiben.*

Da diese Grenzrichtungen als *astronomisch fest* betrachtet werden müssen, wird es nunmehr natürlich erscheinen, daß sie ein ideales Bezugsystem für die Gesamtheit der Himmelskörper bilden. Da in Wirklichkeit diese Grenze unerreichbar ist, so müssen wir, um genau zu sein, sagen, daß das astronomische Weltall unter Annahme des obigen Postulates uns ein System von Richtungen liefert, die um so *fester* sind, in je größere Entfernungen es der Beobachtung zu dringen gelingt.

Die praktische Bedeutung dieser Bestimmung geht aus der Tatsache hervor, daß die Sehstrahlen, die von der Erde zu allen eigentlichen Sternen führen, bereits Richtungen ergeben, deren Winkel sich erst *innerhalb von Jahren* merklich ändern, und die deshalb ein Bezugsystem liefern, das für die gewöhnlichen Bedürfnisse genügt. Eine fortschreitende Korrektur kann, wenn nötig, durch Vergleichung der Winkelvariationen hergestellt werden, indem man die nächsten Sterne, deren Orientierung schneller als die der anderen sich verändert, ausschaltet.

Es ist sehr bemerkenswert, daß die NEWTONschen Gesetze der Dynamik andererseits dazu führen, die oben definierten Richtungen wiederzufinden. Und eine solche Erkenntnis wiegt reichlich die unglückliche Ausdrucksweise NEWTONS auf, durch die der Begriff der absoluten Bewegung als a priori gegeben eingeführt wurde.

Wie wir sagten, wurde die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes zuerst implizite von GALILEI im Falle der Schwerkraft und *auf die Erde bezogen* betrachtet. Aber die Heranziehung astronomischer Daten führt zu einer Korrektion dieser Gleichung, indem sie zeigt, daß sie genauer wird, wenn man sie auf die Richtungen der Sterne bezieht. Wenn man nun heute der von NEWTON stillschweigend gemachten Annahme der absoluten Bewegung einen positiven Sinn beilegen will, so muß man, scheint es, das folgende *Postulat* aufstellen:

Die Gesetze der Dynamik gelten um so genauer, je genauer das System, auf das sie bezogen werden, mit den astronomisch festen Richtungen übereinstimmt.

Dank der dynamischen Gesetze kann man den „festen Richtungen" einen anderen Sinn beilegen, der nicht mehr direkt von der Astronomie abhängt und doch noch immer *relativ* ist. Das kann man machen, indem man die Bewegung eines Massenpunktes oder die eines *starren Körpers* betrachtet; in diesem Falle erlaubt die Dynamik, gewisse *feste Achsen und Ebenen* festzulegen, d. h. Achsen und Ebenen, die *mit den* analog in bezug auf *einen anderen bewegten Körper* definierten *konstante Winkel* bilden.

Es ist wichtig, noch genauer einzusehen, daß bei allen diesen Bestimmungen nur Richtungen oder Stellungen von invariablen Ebenen und *nichts weiter* vorkommen.

Zu diesem Zweck gehen wir von dem NEWTONschen Bewegungsgesetz aus und teilen *die Bezugsysteme in zwei Kategorien:*

1. Systeme, in bezug auf die dieses Gesetz gilt;
2. Systeme, in bezug auf die die Bewegungsgleichung eine andere und kompliziertere ist.

Ein beliebiges System aus der ersten Kategorie (α) kann *durch Konvention* als *fest* bezeichnet werden, und man kann von *Bewegung* (wenn man es vorzieht, auch von *absoluter*) in bezug auf α sprechen. Aber es handelt sich darum, zu sehen, was in dieser Verabredung *willkürlich* ist, d. h. in welcher Weise die Systeme der ersten Kategorie sich gegeneinander bewegen können.

Zu diesem Ende nehmen wir unter Aufrechterhaltung unserer Verabredung an, daß wir uns in einem geschlossenen Käfig P befinden, der sich irgendwie in den Himmelsräumen bewegt; es ist die Frage, ob und welche geeigneten Experimente über die Bewegung der Körper innerhalb P uns über die Bewegung des Käfigs in bezug

auf α Aufschluß geben könnten. Wir denken uns, daß wir Instrumente bei uns haben, mit denen wir das Innere von P erforschen, die auf einen sich darin bewegenden Massenpunkt wirkenden Kräfte direkt und indirekt messen können, usw.

Im allgemeinen nimmt man an, daß durch diese Erforschung die Kräfte innerhalb P als *absolute Kräfte* bestimmt werden, d. h. unabhängig von der Bewegung von P, und dann führt eine mathematische Untersuchung der Frage zu folgendem Resultat:

Die Bewegung des Systems P in bezug auf α kann durch Versuche innerhalb P bis auf eine *gleichförmige Translation* bestimmt werden.

D. h. die Bezugsysteme der ersten Kategorie, in bezug auf die die dynamischen Gesetze gelten, sind in relativer Ruhe oder besitzen gegeneinander eine *gleichförmige Translation.*

Dieser Schluß ist falsch, weil alle innerhalb P möglichen Experimente, durch die Kräfte bestimmt werden, in ihrer Bedeutung teilweise von der Bewegung von P abhängen.

Es ist nötig, die Bedeutung dieser unserer Kritik ausführlicher zu erklären.

In jeder sinnlichen Feststellung einer Kraft tritt entweder die Kraft auf relativ zu dem System, dem das als fest betrachtete Instrument angehört, oder die Differenz zwischen den Kräften, die an den verschiedenen Punkten des erreichbaren Feldes wirken. Eine Kraft, die auf alle Punkte eines Feldes gleichmäßig, mit derselben Intensität und Richtung wirkt, kann nicht konstatiert werden und kann, wenn man von den umgebenden Körpern absieht, als nicht vorhanden betrachtet werden.

Allerdings fühlen wir den Stoß einer Lokomotive, wenn wir uns auf ihr befinden, aber das rührt daher,

daß die neue Kraft, die sich der Bewegung entgegensetzt, nur auf das Material wirkt, das uns trägt, und nicht auf unsere eigene Person.

Desgleichen konstatieren wir die Schwerkraft, die in gleicher Weise auf die auf der Erde befindlichen Körper wirkt; aber diese Konstatierung wird nur möglich dank dem Widerstande der Erde selbst, die, durch die Unterstützung der unteren Schichten am Fallen gehindert, sich so verhält, als ob auf sie dieselbe Kraft nicht wirkte.

Befänden wir uns jedoch in einem zu Boden fallenden Käfig, so würden wir die Empfindung des Fehlens der gewohnten Schwerkraft verspüren; aber unsere Situation wäre während des Falles derjenigen eines Menschen völlig ähnlich, der sich in einem Käfig außerhalb der Sphäre der irdischen Gravitation befände; erst der Zusammenstoß mit der Erde würde den Zweifel des hypothetischen himmlischen Reisenden, der die Bewegung seines Gefängnisses zu erforschen versuchte, mit einem Schlage schrecklich zerstören.

Wenn wir demnach in einem Käfig P bleiben, so sagen uns die Versuche innerhalb desselben gar nichts über die Translationsbewegung von P in bezug auf das als ruhend angenommene System α der ersten Kategorie.

Die Sache verhält sich anders mit den Rotationen von P.

Wenn nämlich P um eine Achse rotiert, so können wir innerhalb des Feldes entgegen dem fundamentalen Postulat der Newtonschen Mechanik, das wir im § 22 prüfen werden, scheinbare Kräfte konstatieren, die nicht von der Lage allein abhängen und die auf die bewegten Körper wirken; sie entsprechen den *zusammengesetzten Zentrifugalkräften* im Theorem des Coriolis. In einer praktisch einfacheren, aber wesentlich äquivalenten Weise können wir die Rotationsbewegung von P durch

Versuche über die Bewegung der starren Körper erkennen, wir werden z. B. konstatieren, daß die permanenten Achsen verschiedener Kreisel ihre Richtung gleichmäßig ändern, indem sie konstante Winkel miteinander bilden, und daß man einer Kraft bedarf, um sie abzulenken. Demnach ist das positive Ergebnis unserer Untersuchung das folgende:

Der Begriff der auf ein Bezugsystem bezogenen *relativen Kraft* gestattet *durch innere Versuche*, die den Prinzipien der Dynamik gemäß gedeutet werden, *die Bewegung* des Systems in bezug auf *α nur bis auf eine beliebige Translation zu bestimmen.*

Mit anderen Worten: die Systeme der ersten Kategorie, in bezug auf die die dynamischen Gesetze gelten, befinden sich nicht notwendig in relativer Ruhe, sondern können sich gegeneinander mit einer *beliebigen Translationsbewegung (gleichförmiger* oder *ungleichförmiger)* bewegen.

Eine Illustration des Gesagten ergibt sich aus den Versuchen, durch die man *auf der Erde* beweist, daß sie *sich um sich selbst dreht:* nämlich das FOUCAULTsche Pendel und die östliche Ablenkung der fallenden Körper, die auf Grund des CORIOLISschen Satzes vorausgesehen und von TADINI (1796) und noch vollkommener von REICH (1831) konstatiert wurde.

Die *Tatsache*, die in der Behauptung „die Erde dreht sich", abgesehen von der Vergleichung mit den Sternen enthalten ist, ist also die folgende: Wenn man die Bewegungserscheinungen auf der Erde mit hinreichender Genauigkeit analysiert, so findet man darin dieselben charakteristischen Umstände, die sich bei einer oberflächlichen Betrachtung, bei den Bewegungserscheinungen auf einem rotierenden Körper, z. B. einem einen Kreis beschreibenden Schiffe usw., zeigen.

Die Behauptung, daß die Erde sich um die Sonne dreht, hat theoretisch eine ähnliche Bedeutung. Aber

es scheint, daß die oben erwähnten Versuche sich nicht hinreichend genau anstellen lassen, um die Umstände, um die es sich hier handelt, zur Erscheinung zu bringen. Wenn man jedoch die Bewegung des Mondes um die Erde mit dem Fall eines schweren Körpers vergleicht, so sind die Störungen dieser Bewegung in einem ähnlichen Sinne zu deuten, wie die Versuche von TADINI und REICH.

Einen indirekten Beweis der Bewegung der Erde um die Sonne kann man auch auf der Erde aus den Versuchen entnehmen, die die tägliche Variation der Schwerkraft zeigen (vgl. § 13).

Die angestellte Untersuchung läßt erkennen, daß der dynamische Begriff der von NEWTON als absolut betrachteten Bewegung implizite eine Tatsache einschließt, nämlich die Übereinstimmung der verschiedenen Methoden, ein System von Richtungen zu bestimmen, die untereinander unveränderliche Winkel bilden.

Die Untersuchung des besagten Begriffs muß vor allen Dingen diese Tatsache klarmachen. Dies geschieht, wenn man als Bezugsrichtungen die *astronomisch festen Richtungen* nimmt und dann (in dem Trägheitsgesetz usw.) die relative Ruhe anderer durch die Bewegung der Körper und der gegebenen Bedingungen definierter Richtungen postuliert.

Man kommt so zu dem Vorschlag von MACH, der seinerzeit bei den am meisten positivistisch gerichteten Gelehrten großen Anklang gefunden hat.

Wenn wir in dem folgenden Paragraphen von „Bewegung" sprechen, so werden wir an diese astronomische Bestimmung des Bezugssystems denken; aber wir werden Gelegenheit nehmen, zu bemerken, daß es möglich ist, einen *allgemeineren Teil der Dynamik, der dem Trägheitsgesetz vorhergeht, abzuspalten, der gilt, wenn man Kräfte*

und Bewegungen in bezug auf ein beliebiges System betrachtet.

§ 19. Masse.

Wenn man die Umstände, die die Bewegung der Körper bestimmen, untersuchen will, so bietet sich die natürliche Unterscheidung dar zwischen denjenigen Eigenschaften, die in bezug auf den beweglichen Körper *innere* Eigenschaften sind, und den *äußeren* Beziehungen zu anderen Körpern usw.

Dieser Unterschied tritt ziemlich deutlich hervor in den ersten Fällen, wo es sich um eine Bewegung handelt, die durch Muskelkraft oder durch den Zug eines elastischen Fadens usw. hervorgerufen wird. Es findet dann eine gegenseitige Unabhängigkeit statt zwischen zwei bestimmenden Elementen, die sich in der Erscheinung überlagern, nämlich demjenigen, welches wir als Muskelkraft usw. (die Kraft) messen, und demjenigen, das wir dem bewegten Körper zuschreiben, nämlich sein *Gewicht* oder seine *Masse.*

Gewicht und Masse erscheinen zuerst als genau dasselbe Ding; aber MACH zeigt scharfsinnig, wie sie unterschieden werden können durch einen Versuch, bei dem zwei an einer Rolle aufgehängte Gewichte ein System des indifferenten Gleichgewichts bilden, das dennoch nicht in Bewegung gesetzt werden kann ohne Anwendung einer Kraft, die der Summe der beiden Gewichte proportional ist.

NEWTON, der in der *Masse* etwas vom Gewichte Verschiedenes erkannt hatte, gelangt dazu, sie als *Quantität der Materie* vorzustellen und ihren Begriff durch seine Definitio I zu erklären: „Quantitas materiae est mensura eiusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim." Diese Definition wird im allgemeinen verworfen, weil sie an Stelle der Masse

einen neuen, nicht definierten Begriff, die Dichte, einführt, der ebenso dunkel ist wie derjenige, den man erklären will.

Es ist jedoch ungerecht anzunehmen, daß deshalb die NEWTONsche Definition gänzlich bedeutungslos wäre. Die in ihr enthaltene Vorstellung kann nämlich als eine Gesamtheit von definitorischen Bedingungen gedeutet werden, die dazu dienen, eine *additive Größe* zu charakterisieren, die in bezug auf eine gewisse *Gruppe von physikalischen Transformationen* der Körper (Bewegungen, Kompressionen und Dilatationen) *invariant* ist. Wir wollen versuchen, dieses zu erklären.

Wir beginnen damit, zu bemerken, daß die Vergleichung der Körper uns dazu führt, sie uns mit Hilfe abstrakter Begriffe vorzustellen, in bezug auf die wir von *physikalisch gleichen* und folglich von *homogenen* Körpern sprechen können. In dieser Abstraktion liegt die Erkenntnis, daß die als „gleich" bezeichneten Körper füreinander in den verschiedenen Arten von Erscheinungen (physikalischen, chemischen usw.) *substituiert* werden können. Nun kann man von dem allgemeinen Begriff der physikalischen Gleichheit zu weiteren Abstraktionen vorschreiten, die sich auf gewisse Erscheinungsarten beziehen; Körper, die in bezug auf diese füreinander gesetzt werden können, werden eine allgemeinere Gleichheit in bezug aufeinander besitzen, oder sie werden, wenn man lieber will, gewisse *gleiche Eigenschaften* besitzen.

Eine allgemeine Methode, ähnliche Abstraktionsprozesse zu vollziehen, besteht in der Betrachtung von *Gruppen von Operationen oder Transformationen* (physikalischen, chemischen usw.), *durch die gewisse ungleiche Körper gleich gemacht werden können.*

Die Abstraktion führt dann zur Definition einer „Gleichheitsbeziehung", die die Eigenschaften der Tran-

sitivität und Symmetrie besitzt (Kap. III § 14), sofern es sich um eine *Gruppe* von Transformationen in dem besonderen Sinne des Wortes „Gruppe" handelt, den die Mathematiker demselben beilegen. Das heißt:

a) wenn die Operationen A und B der Gruppe angehören, so gehört ihr auch diejenige Operation an, die aus der sukzessiven Zusammensetzung der beiden entsteht (ihr *Produkt*);

b) wenn A der Gruppe angehört, so gehört ihr auch die *umgekehrte* Operation an.

Die einfachste Gruppe von Transformationen der Körper ist die *Gruppe der Bewegungen*, und es liegt im Begriff der physikalischen Gleichheit, daß sie von den Bewegungen nicht aufgehoben wird. Das wird ausgedrückt, indem man sagt, daß jede physikalische Gleichheit in bezug auf die genannte Gruppe invariant ist.

Eine andere einfache Gruppe von physikalischen Operationen besteht in dem Teilen und Wiederzusammensetzen der Teile eines Körpers auf verschiedene Weise; diese Gruppe führt zu einer allgemeineren *physikalischen Gleichheit, die von der geometrischen Form absieht.*

Dann kommt die Betrachtung der *Gruppe G*, die aus *Bewegungen, Teilungen und Zusammensetzungen, Kompressionen und Dilatationen* der Körper besteht.

Die NEWTONsche Vorstellung der Masse als „Quantität der Materie" führt zu dem Versuch, für jeden Körper eine *positive Zahl* mit folgenden Eigenschaften zu definieren.

1. Sie hat denselben Wert für alle Körper, die durch Transformationen der Gruppe G aufeinander zurückgeführt werden können;
2. sie ist in bezug auf die Summe zweier Körper *additiv* oder distributiv, so daß, „wenn man zwei Körper vereinigt, die Masse des neuen Körpers gleich der Summe der Massen der Komponenten

ist". Dies wird dadurch ausgedrückt, daß man sagt: die Masse wird definiert als *eine additive Größe, die in bezug auf die Gruppe G invariant ist. Die Existenz einer solchen Invariante* schließt die Annahme einer Tatsache ein, die postuliert werden muß. Die Notwendigkeit dieses Postulats ergibt sich aus der Beobachtung, daß die engere Gruppe, die aus den Bewegungen, Teilungen und Zusammensetzungen besteht, eine und nur eine additive Invariante, „*das Volumen*", zuläßt.

Das hier notwendige Postulat kann man am einfachsten ausdrücken, wenn man sich auf homogene Körper bezieht:

Seien *A* und *B* zwei physikalisch gleiche homogene Körper, und man vollziehe an *B* Teilungen, Zusammensetzungen, Kompressionen und Dilatationen; wenn man nach einem beliebigen Zyklus von Operationen zu einem homogenen Körper gelangt, dessen Teile denen von *A* gleich sind, so hat dieser Körper dasselbe Volumen wie *A*.

Beschränken wir uns einen Augenblick auf die Betrachtung einer Gesamtheit von Körpern, deren Teile durch Transformationen der Gruppe *G* einander gleich gemacht werden können. Man kann dann einen homogenen Bezugskörper *A* wählen und für jeden seiner Teile *die Masse dem Volumen proportional* setzen und demnach die *Dichte* eines Elementarkörpers *B* (der als homogen betrachtet wird), definieren als das umgekehrte Verhältnis seines Volumens zu demjenigen eines Elementes, das durch Transformation einem Teile von *A* gleich gemacht worden ist. Dann ergibt sich die Definition der Masse nach NEWTON als *Produkt von Volumen und Dichte.*

Das Abstraktionsverfahren, das gemäß der NEWTONschen Vorstellung zur Definition der Masse führt, ist, wie wir sahen, nicht auf die Gesamtheit aller Körper

anwendbar, sondern nur auf eine beschränkte Gesamtheit derjenigen Körper, die innerhalb der Gruppe G aufeinander reduzierbar sind.

Aber *diese Gruppe G kann erweitert werden*, wenn man auf Grund der *atomistischen* Vorstellung sich die *chemisch reduzierbaren* Körper als durch gedachte Teilungen und Zusammensetzung (Kompressionen und Dilatationen) ihrer Teile erhalten denkt. Und die derart erweiterte Gruppe G läßt noch immer die additive Invariante zu, die für die engere Gruppe definiert wurde, da das oben ausgesprochene Postulat auch in der erweiterten Fassung gilt.

Dies ist gerade die Entdeckung Lavoisiers, dessen *Prinzip der Erhaltung der Materie* folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

Seien A und B zwei homogene, physikalisch gleiche Körper, und auf B sollen innere physikalisch-chemische Transformationen angewandt werden; wenn man dann nach einem Zyklus von Transformationen zu einem homogenen Körper gelangt, dessen Teile denen von A gleich sind, so nimmt dieser Körper dasselbe Volumen wie A an.

Man kann daher voraussetzen, daß die Masse für ein System von chemisch aufeinander zurückführbaren Körpern als eine *Größe* definiert ist, *die additiv und in bezug auf die physikalisch-chemischen Transformationen invariant ist.*

Diese Definition entspricht in der atomistischen Theorie der *Zahl der Elementarteilchen* der Körper.

Nun könnte man die vorstehende Definition der Masse auf alle Körper ausdehnen, wenn es erlaubt wäre, die Hypothese der *Einheit der Materie* anzunehmen, deren positiver Sinn in folgendem besteht:

1. in der Möglichkeit, die Gruppe der physikalisch chemischen Transformationen zu erweitern, indem

man *hyperchemische* Transformationen in Betracht zieht, in bezug auf die alle Qualitäten der Materie aufeinander reduzierbar sein würden.

2. In der Ausdehnung des LAVOISIERschen Prinzips auf diese hyperchemischen Transformationen.

Die Frage der hyperchemischen Transformationen steht heute neuerdings auf der Tagesordnung, seit es RAMSAY gelungen ist, aus der Emanation des *Radiums* das *Helium* zu gewinnen, und er diesen Versuch als eine Transformation gedeutet hat, durch die das Atom reduziert wird. Es ist also nicht ausgeschlossen, daß der Fortschritt der Wissenschaft der auf die Hypothese der Einheit der Materie gegründeten Definition der Masse einen positiven Sinn beilegt, abgesehen von der Schwierigkeit, auf diese Weise die Massen praktisch zu vergleichen.

Wenn man von den problematischen hyperchemischen Transformationen absieht, so enden die chemischen Transformationen bei irreduzibeln Qualitäten der Materie, mit anderen Worten, um uns in mathematischer Sprache auszudrücken, bilden sie eine in bezug auf das System der Körper *intransitive Gruppe.* Es ist daher von Wichtigkeit einzusehen, daß die additive Invariante in bezug auf diese Gruppe nicht genügt, um die Masse eines Körpers mit genügender Bestimmtheit zu definieren.

Betrachten wir nämlich die chemischen Elemente, die wir mit

$$A_1 \; A_2 \ldots$$

bezeichnen wollen. Zu jedem von ihnen gehört eine additive Invariante bzw.

$$m_1 \; m_2 \ldots,$$

die einen nach Belieben zu bestimmenden Proportionalitätsfaktor enthalten, der von der Maßeinheit abhängt. Nun stellt ein beliebiger Ausdruck von der Form

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + \cdots$$

eine additive Invariante für die Körper, die aus

$$A_1 + A_2 + \cdots$$

zusammengesetzt sind, in bezug auf die Gruppe der physikalisch-chemischen Transformationen dar.

Der betrachtete Ausdruck enthält ferner alle möglichen additiven Invarianten; die Masse geht in ihn demnach entsprechend einer besonderen Bestimmung der Konstanten a_1 a_2 ... ein; aber gerade diese Bestimmung wird durch die chemischen Transformationen nicht geliefert, und neben der Masse treten auch von ihr unter diesem Gesichtspunkte ununterscheidbar andere additive Invarianten auf, von denen einige eine besondere Bedeutung haben und daher in der Chemie und Physik betrachtet werden, z. B. die volumetrischen Eigenschaften in bezug auf den sog. absoluten Nullpunkt, gewisse optische kalorimetrische usw. Eigenschaften.

Aus dem Vorangehenden ergibt sich, daß diejenigen Betrachtungen und Vorstellungen, mit deren Hilfe man versucht, die Masse eines Körpers als eine *innere* Eigenschaft zu definieren, d. h. unabhängig von dem Einfluß, den äußere Körper auf ihre Bewegung ausüben können, nur zu einer unvollkommenen Bestimmung dieser Eigenschaft führen.

Nichtsdestoweniger ergibt die angestellte Untersuchung das folgende Resultat:

Es gibt eine Klasse von Bewegungserscheinungen (die durch Muskelkraft, durch elastischen Druck usw. hervorgerufen werden), welche sich in gleicher Weise vollziehen, wenn man den bewegten Körper, der als Massenpunkt betrachtet wird, durch einen anderen Körper (Punkt) ersetzt, der auf jenen chemisch reduzierbar und von *gleicher Masse* ist, während die Einsetzung *ungleicher Massen* die Erscheinung verändern würde.

Wir können schematisch diese Fälle der Bewegung als solche bezeichnen, in denen die *Bewegung von dem*

physikalisch-chemischen Zustand des bewegten Körpers unabhängig ist, indem wir uns vorbehalten, die Erkenntnis dieser Unabhängigkeit später auf die Erforschung des Kraftfeldes zurückzuführen, in dem sich die Bewegung vollzieht.

Wenn man nun annimmt, daß die Klasse dieser Bewegungen direkt definiert sei, so kann man als „gleich" die Masse derjenigen chemisch aufeinander zurückführbaren Körper definieren, die bei diesen Bewegungen *durcheinander ersetzt werden* können.

Und das wichtige ist, daß *diese Definition* auch *auf den Fall beliebiger Körper ausgedehnt* werden kann, weil das *Postulat der Masse gilt*, das folgenden Inhalt hat: Wenn die Bewegung eines materiellen Punktes *A* von den physikalisch-chemischen Bedingungen des bewegten Körpers unabhängig ist, so kann man, ohne die Bewegung zu verändern, den Körper *A* durch einen anderen aus anderem Stoffe gebildeten ersetzen, wobei die Menge dieses Körpers in einem bestimmten quantitativen Verhältnis zu *A* steht.

Auf Grund dieses Postulats kann man als *gleich* die *Massen* zweier chemisch nicht aufeinander zurückführbaren Körper definieren, wenn dieselben in bezug auf die betrachteten Bewegungen durcheinander ersetzt werden können. So gelangt man zu der *allgemeinen Definition der Masse*, aus der die Willkür verschwindet, die noch in ihr übrig blieb.

Das Postulat der Masse behauptet im wesentlichen „die Unabhängigkeit der Bewegung von der Qualität der bewegten Materie". Aber diese Unabhängigkeit hängt von den Bedingungen ab, die in der Aussage berücksichtigt worden sind, und die man auf Grund der folgenden Betrachtungen deutlicher bestimmen kann.

Wenn wir uns die Kräfte vorstellen, die in jedem Augenblick auf die bewegten Körper wirken, so können

wir annehmen, daß dieselben von der Qualität der Materie dieser Körper oder von ihrem physikalischen Zustand abhängen; aber wir nehmen an, daß die sich ergebende Bewegung von der Qualität der Materie unabhängig ist, soweit sie die betrachteten Kräfte nicht modifiziert.

Dieses Kriterium macht die Anwendung unseres Postulats der Ersetzbarkeit genauer. Es wird z. B. ein Punkt *A* von einem elastischen Faden gezogen. In diesem Falle hängt die Kraft nicht von der Natur von *A* ab. Man muß daher annehmen, daß auch die sich ergebende Bewegung dieselbe ist, wenn man für *A* einen anderen materiellen Punkt *B* setzt, sofern die Quantität der Materie in *B* so genommen wird, daß die Masse derjenigen von *A* gleich wird. Das Postulat hat nun den Sinn, daß die beiden Massen *A* und *B*, die in diesem Versuche als gleich erkannt wurden, auch bei einer beliebigen anderen Bewegungserscheinung unter den erwähnten Bedingungen durcheinander ersetzt werden können. Wenn z. B. eine Feder auf *A* drückt, so hängt auch hier die Kraft nicht von der Natur von *A* ab. Demnach muß sich die Bewegung von *A* ebenso vollziehen wie die von *B*, wenn man diesen Körper (an Stelle von *A*) dem Druck derselben Feder aussetzt.

Wenn dagegen *A* eine elektrisierte Kugel in der Nachbarschaft einer anderen ähnlichen Kugel ist, so wirkt auf *A* eine Kraft, die vom Zustande dieses Körpers abhängt. In diesem Falle wird also die Ersetzung von *A* durch *B* die Kraft und folglich auch die entsprechende Bewegung verändern.

§ 20. Das Postulat der Masse und das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.

Aus der vorstehenden Untersuchung ergeben sich zwei Wege, um durch Abstraktion zu einer Definition

der Masse zu gelangen, indem man die „Gleichheit der Massen" definiert:

1. Entweder geht man aus von der Betrachtung derjenigen Eigenschaften des bewegten Körpers, die wir in einem relativen Sinne als *innere* bezeichnet haben, d. h. die nicht von den *äußeren* die Bewegung bestimmenden Umständen abhängen;
2. oder man betrachtet die verschiedenen möglichen Substitutionen der bewegten Körper unter verschiedenen Bedingungen, indem man also irgendwie eine *äußere Definition* der Masse sucht.

Der erste Weg führt nicht zu einer völlig bestimmten Definition. Er läßt jedoch eine wichtige Tatsache erkennen, nämlich eine *Beziehung zwischen den physikalisch-chemischen Transformationen der Materie und dem Gesetz der Bewegung.*

Der zweite Weg, zu dem man, um die Definition der Masse zu vervollständigen, auf jeden Fall seine Zuflucht nehmen muß, führt zur Erkenntnis einer allgemeinen Tatsache, die in der Übereinstimmung zwischen den Substitutionen gleicher Massen in der Bewegung besteht. Diese Tatsache, die das genannte Postulat der Masse bildet, kann als in der Gleichung der Bewegung enthalten angesehen werden, wenn man die Betrachtung der Kräfte voranstellt; man kann sie jedoch auch von einem anderen Gesichtspunkte aus untersuchen, indem man von den Kräften absieht und versucht, das daraus zu beseitigen, was für die Definition der Massengleichheit überflüssig ist. Dazu ist folgendes erforderlich:

1. die Aufmerksamkeit auf eine gewisse Art von Bewegungserscheinungen zu richten und mit Hilfe eines grundlegenden Experimentes die *gleichen Elementarmassen zu definieren*;
2. die Ersetzbarkeit gleicher Massen in andersartigen Erscheinungen unter den erforderlichen Bedingungen zu *postulieren.*

Diese Untersuchung führt zur Herstellung einer Beziehung zwischen dem Massenbegriff und dem NEWTONschen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.

Um die „Massengleichheit" zu definieren, liegt es ziemlich nahe, die Körper in grundlegenden Versuchen zu vergleichen, in denen sie nur paarweise auftreten, wobei man von einem Paar annimmt, daß es von dem Einfluß der äußeren Körper *isoliert* ist, wenn diese hinreichend weit entfernt sind, um keinen merkbaren Einfluß auszuüben. Dieser Gedanke wird von MACH[1]) entwickelt, der zum Ausgangspunkte das NEWTONsche *Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung macht.*

Wir werden so auf eine Untersuchung der Bedeutung dieses Prinzips geführt. Vor allen Dingen ist zu bemerken, daß NEWTON in ihm eine einfache Verallgemeinerung des statischen Symmetrieprinzips (§ 15) sah, indem er implizite annahm, daß „die Kräfte, die aus der gegenseitigen Wirkung der Körper aufeinander entstehen, auf diese Körper in der Bewegung ebenso wirken wie im Gleichgewicht", d. h. daß „sie so wirken, als ob sie *sich momentan ausbreiten*". Wenn man diese Hypothese, die in keiner Weise an der Evidenz der statischen Symmetrie teilhat, annimmt, so liefert das statische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung das *dynamische Prinzip* NEWTONS, das vermöge des Bewegungsgesetzes sich in eine „*Beziehung zwischen den Beschleunigungen* der bewegten materiellen Punkte" verwandelt. In diesem von dem Begriff der Kraft unabhängigen Sinne nimmt MACH das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung an.

MACHS Untersuchung (die wir hier durch die ausdrückliche Hervorhebung der Annahme 3. ergänzen)

1) Op. cit. S. 226. Vgl. VASCHY „Nouvelles Annales de Mathématiques" 1895. Maggi Op. cit. und „Enseignement mathématique" 1901.

führt zu folgendem Ausdruck der in diesem Prinzip enthaltenen Postulate:

1. Zwei materielle Punkte, die ein isoliertes Paar bilden, haben entgegengesetzte Beschleunigungen, welche in die Richtung ihrer Verbindungslinie fallen.
2. Wenn zwei materielle Punkte, A und B, nacheinander und getrennt mit einem dritten, C, zu einem Paare vereinigt werden und mit diesem gleiche (und entgegengesetzte) Beschleunigungen annehmen, so werden auch A und B, wenn man sie zu einem isolierten Paar vereinigt, gleiche (und entgegengesetzte) Beschleunigungen annehmen.
3. Wenn man nacheinander die isolierten Paare betrachtet, die aus den materiellen Punkten
$$A,\ C;\ B,\ C;\ A+B,\ C$$
bestehen, so ist das Verhältnis der Beschleunigung von C zu der von $A+B$ die Summe der Verhältnisse der Beschleunigungen von C zu A und von C zu B.

Auf Grund dieser vorstehenden Postulate kann man folgende *Definition* aufstellen: Das *Verhältnis der Massen* zweier materieller Punkte ist das umgekehrte Verhältnis der Beschleunigungen, die sie annehmen, wenn man sie zu einem isolierten Paar vereinigt.

(Es muß hinzugefügt werden, daß die physikalisch-chemischen Transformationen innerhalb der verglichenen Körper zwar die erwähnten Beschleunigungen, aber nicht ihr Verhältnis ändern können.)

Aus der vorstehenden Definition ergibt sich im besonderen der Sinn des Ausdrucks „*gleiche Massen*“ und das Postulat 2. drückt die *Transitivität* der Gleichheit aus. Die Masse wird also *durch Abstraktion* definiert und ihr *additiver Charakter* ist in dem Postulat 3. enthalten.

Für denjenigen, der das durch die Postulate 1., 2., 3. ausgedrückte dynamische Prinzip der Wirkung und

Gegenwirkung uneingeschränkt annimmt, erscheint das im engen mechanischen Sinne aufgefaßte Postulat der Masse diesem Prinzipe *äquivalent.* Es wird dann die Wahl der Beobachtungen oder Versuche, die zur Definition des „Massenverhältnisses" dienen, und die man z. B. durch die *Gravitation* (VASCHY) oder den *Stoß* (ANDRADE) usw. erhalten kann, gleichgültig.

Immerhin muß man sich die Bedingungen vor Augen halten, denen ein Körper genügen muß, um als materieller Punkt betrachtet zu werden (§ 12), und es ist zu bemerken, daß dieselben beim Stoß nur schwer erfüllbar sind, weil die Form und Lage der Körper, die einander stoßen, auf die Erscheinung derart einwirken, daß sich merkbare Abweichungen von dem theoretischen Gesetze ergeben.

Wir stellen also fest, daß die von MACH angenommene *Äquivalenz zwischen dem dynamischen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung* (den Postulaten 1., 2., 3.) *und dem Massenpostulat von der Systematisierung der* NEWTONschen *Dynamik abhängt.*

Man nehme an, daß das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung und im besonderen das Postulat 1. im allgemeinen nicht gilt, oder daß sich wenigstens seine Gültigkeit mit einer zu bewertenden Annäherung auf eine gewisse Klasse von Fällen beschränkt. Dann muß die darauf gegründete Definition der Masse sich auf einen dieser Fälle beziehen; aber das im Sinne von § 19 verstandene Postulat der Masse wird noch immer auch für diejenigen Erscheinungen der Bewegung, für die die Bedingung 1. nicht erfüllt ist, seinen Sinn behalten.

In diesem Sinne scheint uns das Postulat der Masse mehr auszudrücken als das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung. Daraus ergibt sich die Bedeutung der verschiedenen Vorstellungen, die zu den

beiden Begriffen führen, welche von MACH für identisch gehalten werden.

Wir wollen schließlich noch bemerken, daß unabhängig von der Annahme des allgemeinen dynamischen Prinzips der Wirkung und Gegenwirkung das von MACH angegebene Verfahren noch immer zu einer Definition der Masse führen kann, vorausgesetzt, daß die definierenden gedachten Experimente sich auf die Fälle beziehen, in denen es sich um Körper handelt, *die einander berühren* oder um verbundene Punkte, die beim Zerreißen der Verbindung ihre Gleichgewichtslage verlassen, und wenn man *das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung in einem engeren Sinne* annimmt, wie er sich in der Mechanik von HERTZ darstellt.

So vergleicht VOLTERRA in seinen „Lezioni di Meccanica" zu Pisa (1890) die Beschleunigungen, die zwei starr verbundene ein isoliertes Paar bildende materielle Punkte in dem Augenblick annehmen, in dem das Gleichgewicht durch den Bruch der Verbindung gestört wird.

Man kann die Bemerkung machen, daß, wenn man hier den Kraftbegriff nicht ausschalten will, das erwähnte Gedankenexperiment die Vergleichung der Massen zurückführt auf diejenigen der Beschleunigungen, die verschiedene materielle Punkte annehmen, wenn sie gleichen Kräften unterworfen werden. Man knüpft hier also an das Grundgesetz der Bewegung an, das (wie wir sehen werden) die natürlichste Grundlage für die Vergleichung der Massen chemisch nicht aufeinander zurückführbarer Körper bildet, wobei man soweit wie möglich dem am Anfange dieses Paragraphen charakterisierten ersten Gesichtspunkte folgt.

§ 21. Das Grundgesetz der Bewegung.

Das Grundgesetz der Bewegung eines materiellen Punktes ist, wie wir sagten, in der Vektorgleichung

$$f = m\,\omega$$

enthalten. Seine Bedeutung ist ohne weiteres bestimmt, wenn das Bezugsystem, in bezug auf welches es gilt (§ 18), und die Masse m (§ 20) definiert sind; wenn dagegen die Masse nicht im voraus allgemein definiert ist, so führt die vorstehende Gleichung, wie wir sehen werden, zu einer Vervollständigung dieser Definition.

Wenn man die für das Gesetz der Bewegung vorausgesetzten Tatsachen untersuchen will, so ist es vor allen Dingen nötig, die Umstände zu betrachten, unter denen die historische Entwickelung zu diesem Gesetz geführt hat.

Es war, wie wir sagten, die Frucht einer Induktion, durch die NEWTON das Gesetz der Bewegung der fallenden Körper GALILEIS auf den Fall beliebig variabler Kräfte ausdehnt (ein Fall, auf den sich zahlreiche Untersuchungen von HUYGHENS beziehen).

Die NEWTONsche Formulierung ist in den beiden folgenden Gesetzen enthalten:

Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Lex II: Mutationem motus esse proportionalem vi impressa, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Die Lex I drückt jenes *Trägheitsgesetz* aus, zu dem nach einer Bemerkung MACHS GALILEI durch die Untersuchung der Bewegung der schweren Körper auf der geneigten Ebene als zu einem Grenzfall geführt wurde.

Die Lex II deutet man dahin, daß sie für sich allein die allgemeine Bewegungsgleichung

$$f = m\,\omega$$

ausdrückt, die in ihrem mathematischen Ausdruck für $f = 0$ die Lex I enthält. Deshalb besteht hier nach MACH ein fehlerhafter Pleonasmus!

Unsere Ansicht ist ein wenig davon verschieden.

Vor allem glauben wir, daß, um den Geist des NEWTONschen Systems zu verstehen, man den offenbar neueren Gedanken, daß das Bewegungsgesetz eine *dynamische Definition der Kraft* darstelle, eliminieren muß.

Für NEWTON sollte dieses Gesetz eine Beziehung zwischen zwei Elementen ausdrücken, die er einzeln als bereits bekannt ansah: die Kraft einerseits und das Produkt aus Masse und Beschleunigung anderseits. Aber wie konnte er anders die Kraft als bekannt voraussetzen als vom Gesichtspunkt der Statik?

Wenn man annimmt, daß die Kraft, von der in der Lex II die Rede ist, statisch definiert sei, so erhält diese Lex selbst eine engere Bedeutung als die Differentialgleichung $f = m\omega$. Es wird nämlich eine der willkürlichen Integrationskonstanten in bezug auf das Bezugssystem a priori bestimmt, und um dem Gesetz seine volle Allgemeinheit wiederzugeben, in der es später angewandt wird, muß man eine neue Annahme hinzufügen, für die NEWTON in dem Trägheitsgesetz (Lex I) einen adäquaten Ausdruck gefunden zu haben glaubte.

Wir deuten also den NEWTONschen Text folgendermaßen: Die Lex II bezieht sich auf die beginnende Bewegung, die Lex I auf die Bewegung, auf welche keine Kräfte wirken; das allgemeine Bewegungsgesetz ($f = m\omega$) ergibt sich aus der Zusammensetzung der beiden NEWTONschen Gesetze, wobei allerdings eine noch nicht aufgeklärte Hypothese, die wir im folgenden Paragraphen untersuchen werden, stillschweigend hinzugenommen wird.

Wir wollen die Tatsachen, die in dem *Gesetz der beginnenden Bewegung* ausgedrückt werden, zusammenfassen, wobei wir annehmen, daß die Kraft in dem vorangehenden Gleichgewichtszustand statisch definiert sei.

Das Ergebnis dieser Untersuchung stellt sich dar in einem System von Postulaten und Definitionen, die

wir nunmehr aussprechen wollen, wobei wir die Masse als eine in bezug auf die physikalisch-chemischen Transformationen invariante und additive Größe betrachten, die deshalb nur durch Vergleichung chemisch homogener Körper definiert ist.

Postulat I. Wenn eine Kraft auf einen ruhenden materiellen Punkt wirkt, so beginnt dieser, wenn er nicht mehr zurückgehalten wird, sich in der Richtung der Kraft zu bewegen.

Postulat II. Die einem gegebenen Punkte beigebrachte Beschleunigung ist dem statischen Maß der Kraft proportional.

Postulat III. Gleiche Kräfte bewirken an (chemisch) homogenen Massenpunkten von gleicher Masse gleiche Beschleunigung.

Postulat IV. Wenn zwei Kräfte f_1 und f_2, die getrennt auf zwei materielle Punkte M_1 und M_2 wirken, an ihnen eine gleiche Beschleunigung ω bewirken, so bewirkt eine Kraft, die gleich der Summe $f_1 + f_2$ ist an dem Punkte $M_1 + M_2$, der aus der Vereinigung der beiden gegebenen hervorgeht, wieder dieselbe Beschleunigung ω.

Zu diesen Postulaten kann man die folgende *Definition* hinzufügen: Die *Massen* zweier heterogener materieller Punkte werden *gleich* genannt, wenn gleiche Kräfte an ihnen gleiche Beschleunigungen hervorrufen.

Das, was diese Definition zuviel enthält, ist eine Folge des Postulats II: Wenn zwei Kräfte, die f gleich sind, an den materiellen Punkten M_1, M_2 die gleiche Beschleunigung ω hervorrufen, so werden Kräfte, die gleich $2f$ sind, die doppelte Beschleunigung hervorrufen, usw.

Im übrigen genügt der so definierte Massenbegriff den Forderungen, die unsere Analyse ergab, indem der

additive Charakter der Masse in dem Postulat IV enthalten ist.

Um die vorstehenden Postulate zu ergänzen, muß man noch das Postulat II vervollständigen, indem man sich an das *Prinzip des* GALILEI erinnert, von dem wir sehen werden, daß es von D'ALEMBERT auf die Dynamik der Systeme (§ 27) ausgedehnt worden ist. Wir drücken es als *Postulat V* aus:

Mehrere auf einen materiellen Punkt wirkende Kräfte bewirken dieselbe Beschleunigung wie ihre statische Resultante (die Resultante der partiellen Beschleunigung).

Es ist nun von Wichtigkeit, folgendes zu bemerken:

Die Postulate I—V, die das Grundgesetz der beginnenden Bewegung ausdrücken, gelten für ein beliebiges System, auf das sowohl die Kräfte als auch die Bewegung bezogen werden, auch wenn es sich um Achsen handelt, deren Richtungen gegen die astronomisch festen sich verändern.

Sei nämlich α ein System von Achsen, deren Richtungen astronomisch fest sind, β ein System, das in bezug auf α beliebig variabel ist. P ein Punkt, der in bezug auf β im Gleichgewicht ist, und der in einem gegebenen Augenblick sich in bezug auf β zu bewegen beginnt.

Das Gesetz der beginnenden Bewegung sagt dann aus, daß, wenn sowohl die auf P wirkende Kraft als auch die Bewegung von P auf β bezogen werden, die Kraft (im vektoriellen Sinne) der Beschleunigung proportional ist. Nun verwandelt sich diese Aussage in die folgende: Die Kraft in bezug auf β ist proportional der Veränderung der Beschleunigung, die in bezug auf α gemessen wird.

Es geht daraus vermöge des Satzes von CORIOLIS hervor, daß das Gesetz vom Bezugsystem unabhängig ist.

Angesichts dieser Unabhängigkeit kamen REECH und ANDRADE[1]) auf den Gedanken, den klassischen Ausdruck des Bewegungsgesetzes zu ersetzen durch die Proportionalität der Kraft und der Veränderung der Beschleunigung.

Zwischen dieser Formulierung und der unsrigen bestehen zwei Unterschiede:

1. Der erste ist, daß wir uns auf den Fall der beginnenden Bewegung beschränken, in der allein man eigentlich von einer statisch definierten Kraft sprechen kann.
2. Der zweite ist, daß wir die Kraft als *relativ* zu demselben System nehmen, auf das wir die Bewegung beziehen, so daß wir den klassischen Ausdruck des Gesetzes nicht abzuändern brauchen.

Die erste Beschränkung ist vor allem wichtig für unseren Zweck, eine noch nicht aufgeklärte Hypothese hervorzuheben, die in der fortschreitenden Erweiterung des Bewegungsgesetzes enthalten ist.

§ 22. Das verallgemeinerte Trägheitsgesetz.

Wir haben bemerkt, daß das Gesetz der beginnenden Bewegung (Lex II) von NEWTON durch das *Trägheitsgesetz* (Lex I) ergänzt wird, daß aber das allgemeine Bewegungsgesetz, wie es in der NEWTONschen Dynamik angewandt wird, noch eine weitere nicht aufgeklärte Hypothese hinzufügt. Der Übergang von dem Fall der beginnenden Bewegung zu dem allgemeinen Fall mit Hilfe des Prinzips der Resultante erfordert nämlich, daß die Kraft, die auf einen bewegten Punkt wirkt, so gemessen werden kann, als ob der Punkt einen Augenblick lang sich in Ruhe befände.

Diese Annahme der *von der Lage abhängigen Kräfte* bot sich NEWTON sehr natürlich dar, weil seine Dynamik

1) „Leçons de Mécanique physique", Paris 1898.

(obgleich mit einem universellen transzendenten Gewande bekleidet) im Grunde die Anwendung der irdischen Dynamik GALILEIS auf das astronomische Gebiet ist. Diese Entwickelung erklärt in unseren Augen den Weg, auf dem NEWTON zu dem allgemeinen Ausdruck der Prinzipien gelangte, und die Form, in der dies geschah.

Wenn wir nun ausdrücklich postulieren wollen, was zu dem Gesetz der beginnenden Bewegung hinzukommen muß, an Stelle der Lex I, so werden wir das folgende *verallgemeinerte Trägheitsgesetz* aussprechen:

In jedem Augenblick vollzieht sich die Bewegung eines materiellen Punktes so, als ob er aus einem Zustand der Ruhe losgelassen wäre, vorausgesetzt daß:

1. die relative Lage der äußeren Körper (die merklich auf die Erscheinung Einfluß üben) durch diese Annahme keine Veränderung erleiden;
2. man zu der auf den Punkt wirkenden Kraft, die statisch gemesssen wird, wenn er in Ruhe ist, einen Impuls hinzufügt, der der Geschwindigkeit der Bewegung gleich ist.

Es ist kaum nötig hervorzuheben, daß dieses Gesetz eine Tatsache postuliert, die mit hinreichender Annäherung jedesmal dann verifizierbar ist, wenn die Voraussetzungen hinreichend genau erfüllt sind.

Die Dynamik kann auch die Anwendung des Prinzips *korrigieren*, indem sie z. B. den *Widerstand des Mediums* berücksichtigt, in dem ein gegebener Körper sich bewegt; es handelt sich dann darum, auch die Bewegung des Mediums zu betrachten oder wenigstens daraus das Hinzutreten einer neuen Kraft zu entnehmen, die z. B. von der Zusammendrückung der Flüssigkeit oder von ihrer Trägheit usw. herrührt, und die von der Geschwindigkeit des gegebenen bewegten Körpers abhängt.

In diesem Sinne werden *von der Geschwindigkeit abhängige Kräfte* in die Gleichungen der klassischen

Dynamik eingeführt, um für die Bewegung eines Teilsystems das zu ersetzen, was von einem weiteren Systeme herrührt, wo sich die materiellen Punkte unter dem Einfluß von *Kräften* bewegen, *die nur von der Lage abhängen.*

Es bleiben noch zwei Punkte aufzuklären, nämlich:

1. das Verhältnis des gewöhnlichen Trägheitsgesetzes (Lex I) zu dem verallgemeinerten;
2. das Verhältnis dieses Gesetzes zu dem dynamischen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung NEWTONS.

1. Das gewöhnliche Trägheitsgesetz ist ein spezieller Fall unseres Prinzips, den man erhält, wenn man ein Feld von *verschwindenden Kräften* voraussetzt. Unser Prinzip ist äquivalent der Vereinigung dieses speziellen Trägheitsgesetzes mit der Annahme der nur von der Lage abhängigen Kräfte.

Wir wollen noch bemerken, daß in dem speziellen Trägheitsgesetz zwei Annahmen zu unterscheiden sind: die Erhaltung der Richtung in der Bewegung und die Erhaltung der Geschwindigkeit.

Die erste entspricht der geometrischen Anschauung der Bewegung, wenn man die Kräfte als Wirkungen der Körper denkt. Denn ein Punkt, auf den keine Kräfte wirken, erscheint dann als ein solcher, auf den die Veränderungen der (entfernten) Körper keinen Einfluß haben, so daß die Bahn der Bewegung eine Linie wird, die sich nicht verändern würde, wenn man das astronomische Universum um eines ihrer Elemente rotieren ließe, d. h. sie ist eine Gerade.

Die Erhaltung der Geschwindigkeit ist ein Prinzip, das angesichts gewohnter Versuche paradox erscheint, und das eine abstrakte Induktion darstellt, die, wie wir sahen, von GALILEI in einem besonderen Fall gewonnen wurde, zu der die Annahme der nur von der Lage abhängigen Kräfte zusammen mit dem Bewegungsgesetz durch Kontinuität hinführt.

2. Das Verhältnis zwischen der Dynamik der Wirkung und Gegenwirkung und dem verallgemeinerten Prinzip der Trägheit läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

Das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung, als allgemeine Beziehung zwischen den Beschleunigungen bewegter Massenpunkte aufgefaßt, folgt aus dem statischen Symmetrieprinzip zusammen mit dem verallgemeinerten Trägheitsgesetz, wenn man die Kräfte als „Wirkungen zwischen den Körpern" betrachtet.

Das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung in dem engeren HERTZschen Sinne folgt schon aus der Kombination des Gesetzes der beginnenden Bewegung mit dem statischen Symmetrieprinzip.

§ 23. Synthetische Bewertung der Prinzipien.

Die Untersuchung der Begriffe und Postulate der Mechanik des Punktes hat uns zu einer Aufzählung der impliziten und expliziten Voraussetzungen der Wissenschaft geführt, die nunmehr in folgender Anordnung aufgestellt werden können:

1. Postulate des Raumes (Kap. IV) und der Zeit (§§ 3—8),
2. Postulate der Statik: Prinzipien der Symmetrie und Prinzip der Resultante (§§ 15, 16),
3. Prinzip der Erhaltung der Materie (§ 19),
4. Gesetz der beginnenden Bewegung (Postulat I—V, § 21),
5. Die Hypothesen, auf denen die Konstruktion astronomisch fester Richtungen beruhen (§ 18),
6. Verallgemeinertes Trägheitsgesetz (§ 22).

Die Postulate 2. und 4. gelten für das Gleichgewicht und für die Bewegung in bezug auf ein beliebiges System. Nur das Postulat 6. erfordert, daß die Richtungen der Koordinatenachsen astronomisch fest sind.

Wenn wir dies berücksichtigen, ferner die Art, wie man zu den Postulaten selbst gelangt, ihr Verhältnis gegenseitiger Abhängigkeit usw., so wird es natürlich erscheinen, eine *Rangordnung der Prinzipien* aufzustellen.

a) Die Postulate 1. und 2., die direkt auf der Anschauung beruhen, und durch verschiedene Experimente kontrolliert werden, müssen als die allgemeinsten und sichersten Voraussetzungen im Verhältnis zu den übrigen betrachtet werden.

b) Auf dieser statischen und kinematischen Grundlage ruhen die Postulate 3. und 4., die für die Anschauung nicht ebenso evident sind, aber durch direkte Experimente bewiesen werden.

c) Das Postulat 6. (das bis zu einem gewissen Grade mit der Hypothese 5. verknüpft ist), und ebenso das NEWTONsche Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung, das sich daraus ableitet, werden an dritter Stelle als Hypothesen anzuführen sein, die zwar nicht mehr durch direkte (weder bewußte noch unbewußte) Experimente bewiesen werden, die aber durch Induktion und durch die Untersuchung der Gravitationserscheinungen auf der Erde und am Himmel nahe gelegt werden und durch diese Untersuchungen eine indirekte Bestätigung erfahren, die von der Annahme der vorhergehenden Postulate abhängt.

Wir wollen die vorstehenden Ergebnisse in dem folgenden überzeugenderen Ausdruck zusammenfassen: *Die Postulate 1.—5. definieren eine allgemeinere Mechanik, die für ein beliebiges Bezugsystem gilt und sowohl das Gleichgewicht als die beginnende Bewegung umfaßt.* Damit die Dynamik zu bestimmten Voraussichten führt, muß man zu diesem System eine Hypothese hinzufügen, die in der astronomischen Dynamik ihren passenden Ausdruck in dem verallgemeinerten Trägheitsgesetz findet. Man könnte diese Hypothese modifizieren, indem man an

ihrer Stelle irgendein komplizierteres Gesetz annimmt, wie wir es im Kap. VI tun werden. Jedenfalls würde das verallgemeinerte Trägheitsgesetz dieses Gesetz mit einer um so größeren Genauigkeit wiedergeben, je kleiner die betrachteten Geschwindigkeiten sind, d. h. in den Fällen, welche der beginnenden Bewegung *verhältnismäßig* nahe kommen, und dies ist im Planetensystem der Fall!

Eine Schwierigkeit könnte sich höchstens aus der Betrachtung ungeheuer viel größerer Geschwindigkeiten ergeben (s. Kap. VI).

§ 24. Statik der Systeme: Verbindungen.

Bisher haben wir uns auf die Mechanik des materiellen Punktes bezogen. In der Wirklichkeit muß man aber in vielen Fällen Körper betrachten, deren Dimensionen man nicht vernachlässigen darf, und auch in der Definition der „Kraft, die auf einen Punkt wirkt", kann man von einer gewissen Vorstellung solcher Körper nicht absehen.

Die Form, die Größe und im allgemeinen die geometrischen Eigenschaften der im Gleichgewicht oder in Bewegung befindlichen Körper sind eng mit gewissen sinnlichen Bestandteilen verbunden, die man als die *Natur* des Körpers bezeichnet, nicht so mit den Kräften, die auf ihn wirken.

Man kann sich den Körper aus materiellen Punkten bestehend denken, zwischen denen gewisse *innere Kräfte* wirken. Damit wird der Begriff des Körpers auf den eines „Systems von Punkten und Kräften" zurückgeführt: das Problem des Gleichgewichts und der Bewegung wäre hiermit auf die Prinzipien der Mechanik des Punktes zurückgeführt. Aber die Kräfte, um die es sich handelt, stellen in Wirklichkeit eine Annahme dar, die in den meisten Fällen keine Bestätigung erlaubt.

Es ist dahingegen leicht einzusehen, daß in vielen gewöhnlichen Fällen gewisse geometrische Eigenschaften unabhängig von den angewandten Kräften sich unverändert erhalten (oder in einem gewissen Verhältnis mit diesen Kräften variieren); man kann dann die Beobachtung dadurch wiedergeben, daß man hypothetische *Verbindungen* zwischen den Punkten des Körpers annimmt, der also als ein „an geometrische Bedingungen gebundenes System" aufgefaßt wird.

Eine derartige Annahme muß einfach als eine gedankliche Vereinfachung eines a posteriori festgestellten Faktums aufgefaßt werden, z. B. des Faktums, daß die gegenseitigen Entfernungen des Punktes eines festen Körpers innerhalb gewisser Grenzen annähernd unveränderlich bleiben.

Ob man den Begriff der Verbindungen durch den oben erwähnten eines Systems von inneren Kräften ersetzen will, oder ob man im Gegenteil, wie wir dies im Kap. VI tun werden, alle Kräfte als Reaktionen der Verbindungen auffassen will, jedenfalls legt die gleichzeitige Betrachtung von Kräften und Verbindungen unserer Vorstellung überflüssige Bedingungen auf. Sie bedeutet aber in diesem Falle, daß einige *Ergebnisse* (z. B. gewisse Verbindungen) an Stelle von unbekannten *Daten* (inneren Kräften) bei der Bestimmung der Erscheinung gesetzt werden.

Indem wir also alle Fragen über die Möglichkeit einer Reduktion dieser Grundbegriffe auf das VI. Kapitel verschieben, werden wir im folgenden von der Annahme ausgehen, daß Kräfte und Verbindungen in bezug auf die Erfahrung eine positive Bedeutung haben, und daß vermöge derselben es möglich ist, die sichtbaren Erscheinungen zu behandeln, ohne die Vorstellung einer unsichtbaren Welt heranzuziehen. Wir werden aber Gelegenheit haben, an mehreren Stellen die Notwendigkeit

hervorzuheben, zwischen den beiden Begriffen gewisse Beziehungen anzunehmen, die sich in Wahrheit an die oben erwähnten Vorstellungen knüpfen.

§ 25. Hebel und schiefe Ebene: Prinzip der statischen Momente.

Man kann sagen, daß der Begriff der Verbindung von Anfang an in der Statik vorkommt.

Das Gleichgewicht der Systeme nämlich, wie *Hebel* und *schiefe Ebene* haben Archimedes und Stevin früher beschäftigt, als sie zur Betrachtung der Zusammensetzung auf einen Punkt wirkender Kräfte geführt wurden.

Die Geschichte der Begründung der Statik zeigt uns den Weg, den die Entdecker der Grundprinzipien des Gleichgewichtes gegangen sind, Prinzipien, die an die Begriffe der *statischen Momente* und der *virtuellen Arbeit* anknüpfen.

Die Gleichheit der statischen Momente als Bedingung des Gleichgewichts am Hebel ist von Archimedes entdeckt worden. Dieser wollte sie aus Postulaten ableiten, die sich auf elementare Fälle von Symmetrie und Dissymmetrie beziehen, nämlich, daß „man Gleichgewicht erhält, wenn man gleiche Gewichte an gleichen Hebelarmen anbringt“, und daß „kein Gleichgewicht herrscht, wenn man ungleiche Gewichte an gleichen Hebelarmen oder gleiche Gewichte an ungleichen Hebelarmen anbringt“.

Mach hebt an dem Beweis des Archimedes einen notwendigen Fehler hervor. Derselbe macht nämlich stillschweigenden Gebrauch von der Annahme, daß „man, ohne das Gleichgewicht zu stören, ein an einem Hebelarme angebrachtes Gewicht in gleiche Teile teilen und dieselben symmetrisch vom Anbringungspunkte entfernen kann“, oder daß „gleiche und parallele Kräfte,

die senkrecht auf einen starren Stab wirken, durch eine am Mittelpunkte des Stabes angebrachte Resultante ersetzt werden können, die den Komponenten parallel und ihrer Summe gleich ist".

Es ist nichtsdestoweniger zu erwägen, ob nicht vielleicht die von ARCHIMEDES implizite postulierte Hypothese infolge ihrer anschaulichen Evidenz oder wegen der Bedingungen, unter denen sie experimentell verifiziert werden kann, plausibler ist als der Satz, daß „am Hebel Gleichgewicht besteht, wenn die statischen Momente gleich sind". In dieser Beziehung nun können wir das abfällige Urteil MACHS nicht unterschreiben. Es scheint uns unzweifelhaft, daß der Beweis des ARCHIMEDES in Wahrheit lehrreich ist.

Seine Bedeutung, von unserem Gesichtspunkt betrachtet, wird um so größer, wenn man die Entwickelungen über die *Zusammensetzung paralleler Kräfte*, welche auf ein starres Punktsystem wirken, in Betracht zieht; Entwickelungen, die in einem ähnlichen Sinne wie die des § 16 vor sich gehen.

Eine Abhandlung von FONCENEX, die später von D'ALEMBERT und LAPLACE verbessert wurde, erlaubt nämlich ein Gesetz für die Zusammensetzung paralleler und gleichgerichteter Kräfte, durch das diese bis auf eine Konstante k vollständig bestimmt ist, aus den folgenden Annahmen abzuleiten:

1. die Existenz einer einzigen Resultante,
2. die assoziative Eigenschaft der Zusammensetzung der Kräfte,
3. Symmetrieprinzipien.

Das gewöhnliche Gesetz, nämlich, „daß die Resultante zweier parallelen und gleichgerichteten Kräfte der *Summe* der Komponenten gleich ist," ist in dem vorstehenden allgemeineren enthalten und ergibt sich aus ihm, wenn man $k = \infty$ setzt.

Nun hat Genocchi gezeigt, daß mit Beziehung auf das Parallelenpostulat des Euklid man $k = \infty$ ableiten kann. Die statischen Postulate, die er in seinem Beweise verwendet, sind die folgenden:

4. die Möglichkeit, eine Kraft längs ihrer Wirkungslinie zu verschieben,
5. das Prinzip der Zusammensetzung in einem Punkte zusammenlaufender Kräfte,

das hier allerdings in einem allgemeineren Sinne genommen wird, insofern es sich hier darum handelt, (in bezug auf die Gleichgewichtswirkungen), durch die Resultante nicht mehr Kräfte zu ersetzen, die auf einen freien Massenpunkt wirken, sondern Kräfte, die auf einen Massenpunkt wirken, der in einem starren System enthalten ist.[1]) Auf Grund dieser Entwickelungen gelangt man zu der Einsicht, daß die Gleichgewichtsbedingung des Hebels, die durch das Prinzip der statischen Momente ausgedrückt wird, außer durch direkte quantitative Experimente noch durch indirekte in gewisser Weise qualitative verifiziert werden kann, die sich zu einer synthetischen Vorstellung der Erscheinungen verbinden.

Auch für andere einfache Systeme kann man in ähnlicher Weise einen Beweis für das Prinzip der sta-

1) Für die Beziehungen der Frage zu dem Postulat des Euklid vgl. R. Bonola „La Geometria non-euclidea", ein Werk, das bei Zanichelli im Erscheinen begriffen ist.

Man findet hier auch einen Bericht über die Art, wie Lagrange das Problem behandelt. Trotz des Interesses, welches diese Methode bietet, und trotz ihrer Einfachheit ziehen wir ihr dennoch die im Text erwähnten vor, weil in ihnen auf keine dynamische Anschauung Bezug genommen wird, was uns dem Geiste der Frage zu entsprechen scheint. Lagrange dagegen postuliert stillschweigend, daß „Verbindungen, die die gleichen Bewegungen erlauben, in bezug auf das Gleichgewicht durcheinander ersetzt werden können".

tischen Momente als Bedingung des Gleichgewichts erhalten.

Als Beispiel führen wir die Gleichgewichtsbedingung eines schweren Körpers auf der schiefen Ebene an, die von Stevin abgeleitet worden ist, indem er sich des Postulats bediente, daß „eine geschlossene homogene Kette, die um ein Dreieck gelegt wird, sich im Gleichgewicht befindet". Dieses Verfahren erscheint so überzeugend, daß auch Mach ein ihm günstiges Urteil fällt.

§ 26. Prinzip der virtuellen Arbeit.

Das Prinzip des Gleichgewichts, welches auf der Vergleichung der statischen Momente beruht, bildet die Grundlage der Statik der Systeme auf einer Stufe der Entwickelung, die vor den dynamischen Erkenntnissen liegt, und in der die ersten elementaren Versuche unmittelbar an die Anschauung des Gleichgewichts angeknüpft werden, unabhängig von der Betrachtung der möglichen Bewegungen.

Eine höhere Entwickelungsstufe wird durch die Bezugnahme auf dynamische Betrachtungen charakterisiert, und speziell auf die Vergleichung der *virtuellen Arbeit*, d. h. der Arbeit, die an dem System bei kleinen (theoretisch unendlich kleinen) Verschiebungen, welche mit den Verbindungen vereinbar sind, geleistet wird.

(Wir wollen daran erinnern, daß man die von einer Kraft bei der Verschiebung eines Punktes geleistete *Arbeit* das Produkt aus der Kraft und der Projektion der Verschiebung auf die Kraftrichtung nennt.)

Eine erste Beobachtung Stevins über das Gleichgewicht der Systeme von Rollen und eine ähnliche allgemeinere Beobachtung Galileis bei Gelegenheit der schiefen Ebene, die später von Torricelli vervoll-

kommnet wurde[1]), haben zu dem Prinzip des Gleichgewichts geführt, das in seiner weitesten Bedeutung von JOHANN BERNOULLI (1717) erkannt wurde und von LAGRANGE der *analytischen Mechanik* zugrunde gelegt wurde.

Das Prinzip der *virtuellen Arbeit* oder *Geschwindigkeit* wird folgendermaßen ausgesprochen: Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines verbundenen Systems, das irgendwelchen Kräften unterworfen ist, ist, daß die von den Kräften bei einer virtuellen Verschiebung des Systems geleistete Arbeit verschwindet.

Dieses Prinzip drückt eine sehr allgemeine Annahme aus, *die sich auf die Natur der Verbindungen des Systems bezieht*, und die sich (gemäß dem historischen Gesichtspunkt) als ein Ergebnis der Induktion darstellt vermöge einer fortschreitenden Erweiterung des Begriffs der „Verbindung".

Der klassische Beweis, den man heute gewöhnlich für dieses Prinzip gibt[2]), läßt leicht erkennen, daß seine Geltung für die üblichen Maschinen im allgemeinen von einer Untersuchung der verschiedenen Arten von Verbindungen, die bei ihnen zur Anwendung kommen, abhängt.

Das Beweisverfahren stützt sich also auf die Feststellung, daß das Prinzip für die elementaren Fälle gilt: den freien Punkt, den auf einer Fläche beweglichen Punkt, die verbundenen Punkte, aufeinander rollende

---

1) Das Prinzip des TORRICELLI sagt aus, daß das Gleichgewicht der schweren Körper dem Minimum (oder dem Maximum) der Höhe des Schwerpunktes entspricht. Lagrange hat bemerkt, daß dieser spezielle Fall auf das allgemeine Prinzip, das er das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nannte, zurückgeführt werden kann.

2) Vgl. z. B. Appel „Traité de Mécanique rationelle", Paris. Gauthier et Villars 1893. (S. 225.)

Flächen usw., und diese Feststellung vollzieht sich durch eine direkte Vergleichung der auf diese Fälle bezüglichen Experimente oder die Vergleichung der durch das Verschwinden der virtuellen Arbeit gegebenen Gleichgewichtsbedingung mit anderen speziellen Gleichgewichtsbedingungen, die man auf Grund vorhergehender Experimente (bewußter oder unbewußter) als bekannt ansieht.

Es ist demnach klar, daß das Prinzip der virtuellen Arbeit eine Gesamtheit von Tatsachen, die teilweise als evident vorgestellt werden, zu einer allgemeinen Annahme zusammenfaßt, und aus ihrer Gesamtheit andere Tatsachen ableitet, die durch verschiedene Experimente kontrolliert werden können.

Man muß auf den Punkt Gewicht legen, daß die Geltung des Prinzips der virtuellen Arbeit, sofern es aus den statischen Postulaten und gewissen elementaren Gleichgewichtsbedingungen der einfachsten Maschinen abgeleitet wird, durch die Natur der Verbindungen beschränkt ist.

Aber nichts steht einer induktiven Entwickelung des Prinzips entgegen, die zu seiner Anwendung auf Fälle führt, die nicht auf die geprüften Typen zurückführbar sind. Dadurch wird in Wahrheit die in dem Prinzip enthaltene *Annahme* auf einen größeren Kreis von Erscheinungen *ausgedehnt*, und es wird den aus ihm abgeleiteten Folgerungen überlassen, diese erweiterte Anwendung zu rechtfertigen.

Als bemerkenswertes Beispiel einer solchen Erweiterung kann man den Fall anführen, auf den man dadurch geführt wurde, daß man die Invarianz der Entfernungen in einem infinitesimalen Sinne auffaßte; dies ist bei den Gleichgewichtsproblemen der *Fäden* und der *biegsamen*, aber *undehnbaren Flächen* der Fall. Eine andere Erweiterung ergibt sich beim Problem des *hydrostatischen*

Gleichgewichts, wo als Bedingung die *Unveränderlichkeit des Volumens* auftritt, usw.

In einem anderen Sinne wird das Prinzip der virtuellen Arbeit erweitert, wenn es sich um Fälle handelt, in denen nicht sowohl die *Kräfte* als *gegeben* angenommen werden, sondern während jede Annahme über diese beiseite gelassen wird, die in Betracht kommende *Arbeit* direkt gemessen wird, so z. B. in der Theorie der *Elastizität* (Kap. VI). Man nähert sich auf diese Weise derjenigen Entwickelung der klassischen Mechanik, die in der Konstruktion der Energetik ihren konkreten Ausdruck gefunden hat (Kap. VI).

Schließlich müssen wir auf zwei Beobachtungen aufmerksam machen:

Die erste ist, daß das Prinzip des Gleichgewichts, das durch das Verschwinden der virtuellen Arbeit ausgedrückt wird, sich immer auf Fälle bezieht, in denen die Verbindungen selbst geometrische Beziehungen sind, welche durch *Gleichungen* ausgedrückt werden können. Wenn man allgemeiner auch Verbindungen in Betracht zieht, die durch *Ungleichungen* ausgedrückt werden (*einseitige* Verbindungen), so muß bekanntlich das Prinzip selbst auch in eine Ungleichung verwandelt werden.

Die zweite Beobachtung ist die, daß das Prinzip der virtuellen Arbeit, wie im allgemeinen die Mechanik, sich auf den *Grenzfall* bezieht, in dem *von den Reibungen abstrahiert* werden kann. Es ist aber zu erwähnen, daß kürzlich ALMANSI den Versuch gemacht hat, die Reibung als einen Fall von Kräften mit (teilweise einseitigen) Verbindungen zu behandeln. Daraus scheint sich eine ziemlich interessante Verallgemeinerung zu ergeben.

§ 27. Dynamik der Systeme: das d'Alembertsche Prinzip.

Eine Beobachtung von HUYGHENS beim Studium der Schwingungsbewegungen, die in anderer Form von

GIACOMO und später von JOHANN BERNOULLI wieder aufgenommen wurde, wurde von D'ALEMBERT (1743) zu einem allgemeinen Prinzip erhoben.

Ein System von Kräften *U*, welche auf einen aus verbundenen Punkten gebildeten Körper wirken, kann in bezug auf die Bewegungserscheinungen durch ein System von Kräften *V* ersetzt werden, die auf die Elemente (Punkte) des Körpers wirken und gleich dem Produkt ihrer Massen und den Beschleunigungen sind, welche wirklich durch die Kräfte *U* hervorgerufen werden.

Die *Bewegungsgleichungen* des Körpers werden demnach ausgedrückt durch die Bedingungen der statischen Äquivalenz der Kräfte *U* und *V*, d. h. durch die *Gleichgewichtsbedingungen* des Systems der *verlorenen Kräfte* $U-V$.

Wir haben schon hervorgehoben (§§ 16, 21), daß dieses Prinzip bereits im Falle des materiellen Punktes eine tatsächliche Annahme enthält. Es ist nun zu bemerken, daß *das allgemeine* D'ALEMBERTsche *Prinzip eine Folge des* GALILEIschen *Postulats in bezug auf die Dynamik des Punktes ist,* wenn man einige *implizite Hypothesen* annimmt, die sich an den *Begriff der Verbindung* knüpfen.

Der Beweis des allgemeinen D'ALEMBERTschen Prinzips wird nämlich aus folgenden Annahmen geführt:

1. Die Verbindungen können in jedem Augenblick durch Kräfte *(Reaktionen)* ersetzt werden, die auf die Punkte des Systems wirken und von den äußeren Kräften abhängen.
2. Die dynamische Resultante der auf jeden einzelnen Punkt wirkenden Kräfte ist in jedem Augenblick ihrer statischen Resultante äquivalent (GALILEIsches Postulat).
3. Wenn man gleichzeitig an allen Punkten des Systems Kräfte anbringt, die den Resultanten der Verbindungen (und der gegebenen Kräfte) gleich

und entgegengesetzt sind, so ändern sich deren Reaktionen nicht.

Besonders die dritte Hypothese drückt eine Vorstellung von den Verbindungen und von ihren Reaktionen aus, worin diese gedacht werden als Hindernisse für Entfernungsänderungen oder gewisse Bewegungen der Punkte des Systems, die daher ungeändert bleiben, wenn diese bestimmenden Umstände erhalten bleiben.

Das D'ALEMBERTsche Prinzip hat zusammen mit dem der virtuellen Arbeit LAGRANGE ermöglicht, das Problem der Bewegung eines verbundenen Systems für alle die Fälle durch Gleichungen auszudrücken, in denen die Verbindungen durch Gleichungen ausgedrückt sind und sich letzten Endes auf die elementaren Typen zurückführen lassen.

Die *Bewegungsgleichungen* eines Systems drücken in mathematisch genauer Form aus, daß „die Bewegung selbst bestimmt ist, durch die Kenntnis der äußeren Kräfte, der Verbindungen und der (anfänglichen) Lagen und Geschwindigkeiten der Punkte des Systems in einem gegebenen Augenblick". Diese Gleichungen enthalten als besonderen Fall die Gleichgewichtsbedingungen.

In der deduktiven Entwickelung der analytischen Mechanik hat es sich als nützlich herausgestellt, das D'ALEMBERTsche Prinzip oder besser den Satz, den man aus ihm unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit erhält, auf andere *äquivalente* Formen zu bringen, die oft eine schnellere Anwendung gestatten.

Das GAUSSsche *Prinzip des kleinsten Zwanges* und *das* HAMILTONsche *Prinzip* sind solche Umformungen des besagten Satzes von D'ALEMBERT und LAGRANGE. Aber in bezug auf das erste Prinzip ist zu bemerken, daß es für GAUSS eine allgemeinere Bedeutung hat, insofern es auch den Fall der einseitigen Verbindungen umfaßt.

§ 28. Prinzip der lebendigen Kräfte und der kleinsten Wirkung.

Wir wollen nun ausdrücklich den Fall von Systemen betrachten, auf die das Theorem von D'ALEMBERT und LAGRANGE anwendbar ist.

Da dieser Satz auf die Bewegungsgleichungen führt, so wird die Bewegung selbst vollkommen bestimmt, wenn die Kräfte die Verbindungen und die (anfänglichen) Lagen und Geschwindigkeiten der Punkte des Systems gegeben sind, die man für einen bestimmten Augenblick beliebig annehmen kann.

Daraus folgt, daß jedes andere Prinzip, durch welches die Bewegung solcher Systeme bestimmt wird:

1. entweder eine logische Folge des Satzes von D'ALEMBERT und LAGRANGE ist,
2. oder eine einschränkende Bedingung für die Daten (Kräfte und Verbindungen) enthalten muß.

Das erwähnte GAUSSsche Prinzip, das auch auf eine allgemeinere Klasse von Erscheinungen Anwendung findet, und ähnlich das HAMILTONsche Prinzip bieten Beispiele des ersten Falles.

Das Interesse an der Aufsuchung engerer Prinzipien, die dem zweiten Fall entsprechen, hängt mit der Ansicht zusammen, daß „die *Kräfte* und *Verbindungen* nicht *beliebige* Elemente der dynamischen Erscheinung sind", und daß besonders ihre gegenseitigen Beziehungen einer Beschränkung unterworfen sind, deren Kenntnis folglich erforderlich ist, um die konkrete Voraussicht der Tatsachen weiter zu treiben.

Wenn man z. B. eine Verallgemeinerung des astronomischen von NEWTON eingeführten Kraftbegriffes als „Wirkung der Massenpunkte, die sich nach dem dynamischen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung vollzieht", *(Zentralkräfte)* zuläßt, und wenn man dem-

nach die Verbindungen auf die Fälle beschränkt, die aus solchen Kräften sich ergeben würden, (Kap. VI), so gelangt man zur Einführung einer einschränkenden Bedingung, durch die man aus dem Theorem von D'ALEMBERT und LAGRANGE ein bestimmendes Prinzip ableiten kann, welches mehr ausdrückt.

In der Tat führt die Annahme der Zentralkräfte vor allem zur Aufstellung eines Resultates von großer physikalischer Bedeutung, nämlich des *Prinzips der lebendigen Kräfte*, aus dem sich dann eine einfachere Bestimmung der Bewegung ergibt.

Wir wollen kurz die Geschichte dieses Prinzips darstellen:

Als erster machte HUYGHENS beim Studium der Pendelbewegungen die Bemerkung, daß „die Veränderung der Summe der lebendigen Kräfte der Punkte eines bewegten Systems gleich und entgegengesetzt ist derjenigen der von den Kräften geleisteten Arbeit". Und dieser Satz findet auf den allgemeinen Fall Anwendung, auf den sich die LAGRANGEschen Gleichungen beziehen.

Aber mehr noch; die Veränderung der lebendigen Kräfte oder der Arbeit kann oft gemessen werden ohne Kenntnis der während der Bewegung durchlaufenen Bahnen, da sie nur von der *Anfangs- und Endfiguration* des Systems abhängt. Der Keim zu dieser Erkenntnis findet sich bei GALILEI. Dieser bemerkt, daß der Zuwachs an lebendiger Kraft bei einem fallenden Körper nur von der vertikalen Fallhöhe abhängt. HUYGHENS und EULER gaben der GALILEIschen Beobachtung eine allgemeinere Bedeutung.

Endlich erkannte DANIEL BERNOULLI, daß diese Beobachtung unter der Annahme von Zentralkräften allgemeine Gültigkeit besitzt. In diesem Falle nämlich haben die Kräfte ein *Potential*, das nur von der Kon-

figuration des Systems abhängt und „die Veränderung der lebendigen Kraft des bewegten Systems wird in jedem Augenblicke durch die des Potentials gemessen".

Dies ist das Prinzip der lebendigen Kräfte, das (wie wir im Kap. VI sehen werden) demjenigen *der Erhaltung der Energie* vorausgeht.

Für diejenigen Systeme, welche Kräften unterworfen sind, die ein Potential besitzen, erlaubt das Prinzip der lebendigen Kräfte diejenigen von GAUSS und HAMILTON auf einen einfacheren Ausdruck zu bringen, der das sogenannte *Prinzip der kleinsten Wirkung* darstellt.

Die Bewegung vollzieht sich so, daß die Variation des Mittelwerts der lebendigen Kraft des Systems in jedem Zeitintervall ein Minimum wird.

Dieses Prinzip geht historisch dem GAUSSschen vorher. Es wurde zuerst in einer etwas unbestimmten Form von MAUPERTUIS und genauer später von EULER ausgesprochen. LAGRANGE macht auf seinen Zusammenhang mit dem GAUSSschen Prinzip aufmerksam.

§ 29. Die Verifikation der Dynamik.

Aus den vorstehenden Paragraphen ergibt sich, daß eine psychologische Entwickelung der empirischen Daten die durch die Begriffe des Raumes und der Zeit dargestellten Assoziationen und Abstraktionen fortgesetzt hat in der Konstruktion einer Statik und weiter einer Dynamik, die die Statik selbst als Spezialfall umfaßt.

Diese psychologische Entwickelung kann aufgefaßt werden als eine Reihe von Induktionen, die von teils unbewußten, teils bewußten Experimenten ausgehend die anschauliche Auffassung der Tatsachen verallgemeinert.

Die Mannigfaltigkeit dieser Experimente, ihre intime Verbindung zu einem allgemeinen System von

Annahmen, durch die sie miteinander übereinstimmen und einander kontrollieren, bildet von vornherein eine Sicherheit für diese Annahmen selbst und bietet daher eine Garantie für ihre Geltung mit einem hohen Grade von Annäherung, wobei es berechtigt ist, die Prinzipien unter diesem Gesichtspunkt einer Rangordnung zu unterwerfen (vgl. § 23).

Zu einer genaueren und sichereren Bewertung der Dynamik ist es nun erforderlich, die sich aus ihr ergebenden Folgen einer Verifikation zu unterziehen.

Der Satz von d'Alembert und Lagrange, der die Annahmen der Dynamik in ihrer Gesamtheit zusammenfaßt, drückt eine allgemeine Beziehung zwischen gewissen empirischen Daten aus, nämlich den Bewegungen eines Körpers, den auf seine Punkte wirkenden Kräften (d. h. dem Kraftfelde, in welchem der Körper sich bewegt), der Massenverteilung (Dichtigkeit) des Körpers selbst und den Verbindungen zwischen seinen Punkten.

Die Prinzipien der Mechanik, besonders die der Mechanik des Punktes, kann man als besondere Bestimmungen dieser Beziehung betrachten, die hypothetischen einfachen Bedingungen entsprechen. Daher bedeutet die Ableitung des Satzes von d'Alembert und Lagrange aus jenen Prinzipien, daß die dynamische Erscheinung in ihrer Zusammensetzung erklärt wird als die Superposition einer gewissen Anzahl von elementaren Erscheinungen.

Nun erfordert die Verifikation der Dynamik eine Reihe von konkreten Fällen, in denen die angenommenen Daten (Bewegungen, Kräfte usw.) durch Erfahrung mit einem gewissen Grade von Annäherung bestimmt werden können.

Es ist demnach im folgenden besonders erforderlich,

1. daß ein bekanntes Kraftfeld vorliegt, z. B. ein Feld von konstanten Kräften, wie das der Schwerkraft auf der Erde, usw.;

2. daß die Masse des bewegten Körpers und ihre Verteilung (Dichtigkeit) gemessen werden kann;
3. daß die Verbindungen zwischen den Punkten des Körpers mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden können, wie dies vor allem im Falle der *starren Körper* zutrifft.

Diese Bedingungen sind ziemlich gut in zwei Fällen erfüllt, die zu denjenigen Erscheinungen gehören, aus deren Studium die Dynamik entstanden ist:

a) Bei der Bewegung freier fester Körper auf der Erdoberfläche (Fall der schweren Körper, Wurf der Geschosse usw.), wobei sich allerdings die Schwierigkeit zeigt, daß der *Widerstand der Luft* berücksichtigt werden muß, dessen genaue Bewertung zu einer Ergänzung des bewegten Systems durch die umgebende Flüssigkeit führt, d. h. eines Systems, das schwerer zu bestimmenden Verbindungen unterworfen ist.

b) Bei den Bewegungen des Planetensystems. Hier kann man das vollständige System als aus starren Körpern zusammengesetzt betrachten, und wenn man auch die Art, wie die Dichte wechselt, nicht kennt, so kann man doch von dieser Kenntnis absehen, indem man die Körper selbst einmal als Punkte oder als homogene Kugeln oder Ellipsoide oder als Körper betrachtet, deren Dichtigkeit mit einer gewissen Gleichmäßigkeit nach dem Mittelpunkt zu wächst. Bei den Hauptfragen der Astronomie der Lage kann man den Fehler, der aus solchen Annahmen entsteht, vernachlässigen, und es genügt daher, die Massen und die Kräfte, welche auf sie wirken, in ihrer Gesamtheit zu messen.

Nun sind diese Bestimmungen teilweise untereinander verknüpft und hängen von der hypothetischen Verallgemeinerung gewisser Versuche ab. So werden z. B. durch die von Cawendisch, Carlini und Airy und durch die Konstatierung der durch die Flutwellen

hervorgerufenen Kräfte, die mit astronomischen Beobachtungen verglichen werden, in der direktesten Weise die interplanetarischen Anziehungskräfte bewiesen. Durch die Pendelversuche von Bessel, die mit astronomischen Beobachtungen verglichen werden, beweist man, daß das Maß der Masse der von ihr ausgeübten Anziehungskraft proportional ist, usw. Immerhin muß hervorgehoben werden, daß der Genauigkeitsgrad dieser irdischen Experimente im allgemeinen ein geringerer ist als der der astronomischen Beobachtungen, aus denen durch geeignete Vergleichung gewöhnlich eine Korrektion der Massenwerte entnommen wird.

Demnach hat das Verfahren der Verifikation der Dynamik, wie es von den Astronomen geübt wird, folgende Bedeutung: Die Verifikation der Dynamik hängt ab von der Annahme von Hypothesen über die Kräfte und Massen, die ihrerseits direkt verifiziert werden durch eine Vergleichung der astronomischen Beobachtungen mit gewissen irdischen Experimenten, und zwar mit einem Grade von Annäherung, der geringer ist als der der letzteren.

Eine genauere Verifikation der Dynamik wird von der planetarischen Astronomie nur im folgenden Sinne geliefert: Man kann die Massen und Kräfte mit höherer Genauigkeit so bestimmen, daß sie in ihrer Gesamtheit die astronomischen Beobachtungen wiedergeben, und man kann Voraussagen machen, die sich mit sehr großer Genauigkeit bestätigen, nämlich mit einer Abweichung von 15 Winkelsekunden oder einer Zeitsekunde bei der Bewegung des Mondes innerhalb zwei und einem halben Jahrhundert, und mit der höchsten Abweichung von 8 Winkelsekunden oder einer halben Zeitsekunde bei der Bewegung des Merkur in einem Jahrhundert. (Eine Verschiebung des Perihels um 41″.) Für die anderen Planeten bleibt diese Abweichung unterhalb eines Win-

kels von 2″, obgleich sie in bezug auf den Knoten der Venus und das Perihel des Mars zu merkbaren Fehlern führt.[1]

Angesichts solcher Ergebnisse ist das erste Gefühl höchste Befriedigung und Bewunderung, die den Geist zu einer Apotheose der Wissenschaft erhebt.

Aber wer bereits unbegrenztes Vertrauen auf ihren Fortschritt besitzt, wird aus diesem Fortschritt neuen Mut schöpfen, um eine noch genauere Erkenntnis zu suchen.

Und allerdings sind die oben erwähnten Abweichungen obgleich praktisch außerordentlich klein, doch mit unseren feinen Instrumenten noch konstatierbar und überschreiten die Grenze der für die Anwendung der NEWTONschen Theorie vorauszusehenden Fehler. Sie erfordern demnach eine angemessene *Erklärung*.

Man ist deshalb veranlaßt, zwischen den folgenden Erklärungshypothesen zu wählen:

1. Man kann den Fehler korrigieren, indem man die Beobachtung ausdehnt (z. B. indem man die Existenz neuer interplanetarischer Massen oder einer Abweichung der Sonne von der Kugelgestalt usw. erkennt).

2. Man kann das Anziehungsgesetz abändern, indem man dabei die NEWTONsche Dynamik in ihrer Gesamtheit aufrechterhält und demnach eine Anziehungskraft ($f(r)$) als Funktion der Entfernung r annimmt, die aber nicht mehr genau proportional zu $1 : r^2$ ist. In diesem Sinne wurde von HALL vorgeschlagen, den Exponenten 2 zu ersetzen durch 2,000.000.151.

3. Man kann schließlich die eigentlichen in der NEWTONschen Dynamik enthaltenen Annahmen oder einen Teil von ihnen abändern, z. B. die momentane

---

1) Vgl. TISSERAND „Traités de Mécanique céleste“, Bd. IV, Kap. 29.

Ausbreitung der Anziehungskraft und folglich das verallgemeinerte Trägheitsgesetz.

Da es sich um einen sehr hohen Grad von Annäherung handelt, so ist es schwer zu sagen, ob gemäß der Annahme 2. eine derartige Bestimmung der Funktion $f(r)$ möglich ist, daß die Fehler in Grenzen eingeschlossen werden, die vernachlässigt werden können. Aber eine solche Annahme muß sicherlich wenig befriedigend erscheinen, wenn sie nicht durch irgendwelche Vorstellung verstärkt wird, und sie gibt deshalb unserem Vertrauen in die Dynamik ein geringes Gewicht.

Der Gedanke, die Hypothese der Anziehung zu korrigieren, indem man eine endliche Ausbreitungszeit annimmt, bot sich schon LAPLACE dar, der allerdings diese Korrektion nicht als eine Sache auffaßte, die die Prinzipien der NEWTONschen Dynamik selbst berührte und deshalb wahrscheinlich mit irgendeiner anderen Korrektion derselben verbunden sei. Die Rechnung LAPLACES, die von LEHMANN-FILHÉS (1884) erneuert wurde, hat zu einer Ausbreitungsgeschwindigkeit geführt, die das Millionenfache derjenigen des Lichtes beträgt, und es scheint unmöglich, eine solche Geschwindigkeit von einer momentanen Ausbreitung zu unterscheiden.[1])

Wir wollen die astronomische Verifikation der Dynamik an dieser Stelle verlassen. Der erreichte Grad von Approximation, der wahrhaft wunderbar ist, scheint auf diesem Gebiete der Beobachtungen schwer zu übertreffen zu sein. Wir werden also erst nach einer Vergleichung mit weiteren Experimenten zu ihm zurückkehren (vgl. Kap. VI).

Neben den beiden Hauptfällen, die wir im vorstehenden betrachtet haben, muß man auch in Erwägung

---

1) TISSERAND, op. cit. Bd. IV, Kap. 28.

ziehen, wie weit die Dynamik durch andere kompliziertere Erscheinungen verifiziert wird und besonders, in welcher Weise das Funktionieren der Maschinen eine solche Verifikation darstellt.

Nun ist bekannt, daß hier die Voraussagen der Theorie vielfacher Korrektionen bedürfen. Die Kräfte, Massen, Verbindungen und Bewegungen, die uns als *sichtbare Bestandteile* der Erscheinung sich darstellen, genügen nicht mehr zu ihrer Bestimmung. Man muß vielmehr daneben *störende Faktoren* in Betracht ziehen, und zwar in erster Linie die *Reibung*, an die sich Erscheinungen der *Erwärmung, Elektrisierung* usw. anschließen. Man ist deshalb gezwungen zuzugeben, daß die Dynamik in diesen Fällen eine grob angenäherte Erkenntnis darstellt, und weiter, daß die erwähnten Bedingungen einen *systematischen* Einfluß ausüben und daher auch nicht in einer *statistischen Theorie* vernachlässigt werden können.

Immerhin kann dieses Urteil modifiziert werden, indem man zu einer genaueren Verifikation der Dynamik gelangt, sofern es gelingt, *die Gesamtheit der sichtbaren Daten zu erweitern*, indem man z. B. die Schwingungsbewegungen berücksichtigt, die im Schall in Erscheinung treten, usw.

Nun ist diese Erweiterung theoretisch unbegrenzt, wenn man gestattet, mittels Hypothesen über das Feld der Erfahrung hinauszugehen. Man wird so darauf geführt, neben dem sichtbaren Teil der Erscheinungen eine hypothetische unsichtbare Welt zu konstruieren, die, indem sie sich immer weiter von dem entfernt, was unter die Sinne fällt, die Bedeutung eines *fiktiven Zwischengliedes zwischen den realen Gegenständen* erlangt (vgl. Kap. II).

Die so erweiterte Dynamik kann als verifiziert betrachtet werden, wenn die aufgestellte Zuordnung

zwischen den fiktiven Objekten und der physikalischen Wirklichkeit zu einer adäquaten Erkenntnis der verschiedenen Erscheinungsbeziehungen führt und besonders zu einer befriedigenden Korrektion der sich auf die Bewegung beziehenden Voraussagen.

Aber eine solche Verifikation bleibt in jedem Falle abhängig von der Annahme anderer Hilfshypothesen, die der Darstellung zugrunde liegen, durch welche die Kräfte bewertet werden. Welche Bedeutung ihr demnach zukommt, werden wir im Kap. VI prüfen.

Hier wollen wir unsere Kritik mit der folgenden Bemerkung schließen: Bei einer erweiterten Deutung der Dynamik werden nur gewisse Kombinationen der elementaren Daten derselben durch Definition die Bedeutung von realen Gegenständen erlangen und die experimentelle Verifikation wird sich direkt auf die Beziehungen zwischen diesen Gegenständen richten, d. h. auf gewisse Sätze, die aus den hypothetischen Prinzipien abgeleitet sind und nach Annahme mit den Voraussetzungen nicht äquivalent sind. Es wird daher der Gedanke natürlich erscheinen, diese Sätze selbst an Stelle der Prinzipien als Grundvoraussetzungen einer verallgemeinerten Theorie zu betrachten. Auf diese Weise wird die physikalische Interpretation der deduktiven Entwickelungen der Mechanik durch eine Reihe von sukzessiven Induktionen das Verfahren der Erwerbung wissenschaftlicher Begriffe ausführen gemäß den Gesichtspunkten, die im Kap. III dargelegt wurden.

Wie sie weiter zu einer wirklichen Korrektion der klassischen Mechanik führen kann, werden wir im VI. Kapitel sehen.



Kapitel VI.

Die Erweiterung der Mechanik.

A. Die Physik als Erweiterung der Mechanik.

§ 1. Entwickelung der mechanistischen Philosophie.

„*Alles das, worin sich die Tatsache der Bewegung fortsetzt, und alles, was ihr voraufgeht, zu erklären und als Bewegung darzustellen*“, das ist das Problem, das sich die Philosophie DESCARTES stellt und zu dessen Lösung in zwei Jahrhunderten die Arbeiten der größten Theoretiker der Physik beitrugen.

Wir wollen einen Augenblick das beiseite lassen, was den CARTESischen Gedanken im Gegensatz zu anderen verwandten Bestrebungen charakterisiert, und wollen ganz allgemein den genetischen Prozeß der Begriffe betrachten, der zur Konstruktion der Mechanik und zu ihrer fortschreitenden Ausdehnung auf die Physik führt.

Wir erkennen dann in diesem Prozeß eine doppelte Entwickelung:

1. eine *innere* Entwickelung, deren leitender Gedanke die fortschreitende *Reduktion der* in den Begriffen verbundenen *ursprünglichen Sinnesdaten* ist;
2. eine *äußere*, speziell *extensive* Entwickelung, die darauf ausgeht, unter dieselben Begriffe eine immer größere Mannigfaltigkeit von Sinnesdaten zu subsumieren.

Die Grundlagen dieser beiden Entwickelungsreihen sind in kühner Weise von DESCARTES gelegt worden,

noch ehe die Mechanik von NEWTON ausgebildet wurde: einerseits soll die Reduktion bis zu einer vollkommenen Unterdrückung aller *qualitativen Unterschiede* des Gegebenen fortgesetzt werden, d. h. zu einer vollkommenen Vereinheitlichung führen. Anderseits soll die Ausdehnung keiner Beschränkung unterworfen sein, das gesamte physische Weltall soll seine adäquate Erklärung in der Mechanik finden!

Dieser großartige metaphysische Entwurf stellt sozusagen den idealen Rahmen dar, in dem sich der Fortschritt der modernen Wissenschaft vollzieht.

Die ungeheure Arbeit zweier Jahrhunderte hat sicherlich der Physik große Fortschritte gebracht.

Aber schließlich hat sich in unseren Tagen eine Konsequenz ergeben, die von den Begründern dieser Entwickelung keineswegs vorausgesehen war, nämlich eine neue Kritik jener Prinzipien selbst, die bereits als undiskutierbare und strenge Wahrheiten betrachtet wurden; eine Untersuchung der Bedeutung, die ihnen beigelegt werden muß oder kann, damit sie für ein größeres Gebiet von Beziehungen gelten, und schließlich eine Korrektion der NEWTONschen Dynamik, die die neueste Entwickelung plausibel erscheinen läßt.

Dieses sind die für unsere Zeit charakteristischen Ansichten. Obgleich sie den steigenden Wert der Wissenschaft anerkennt, so lehnt sie doch vor allem die Ansicht als absurd ab, nach der der Mechanik eine *absolut strenge und universelle* Bedeutung zukommt, obgleich man für ihre Ausdehnung und für die entsprechende Vervollkommnung ihrer Prinzipien keine Grenze angeben kann.

Der Grundgedanke der CARTESIschen Philosophie muß vor allem kritisch untersucht werden, insofern er darauf ausgeht, die qualitativen Unterschiede auf quantitative Beziehungen zurückzuführen.

§ 2. Quantität und Qualität: die Cartesische Hypothese

Quare opium facit dormire?
Quia est in eo virtus dormitiva,
Cuius est natura sensus assopire.

Diese berühmte Antwort des Arztes bei MOLIÈRE wird oft als Typus der scholastischen *Erklärung* angeführt, der allerdings seinen lächerlichen Anstrich verlieren würde, wenn er sich, wie es im Geiste der ARISTOTELISchen Philosophie liegt, auf die einfache *empirische* Feststellung der vorliegenden Tatsache beschränkte und nicht den Anspruch erhöbe, ihr etwas hinzuzufügen durch Schaffung des *Namens* für eine entsprechende *Qualität.*

Gegenüber der Aristotelischen Ansicht erhebt sich der Cartesische Begriff einer *rationalen Erklärung*, die auf einer metaphysischen Voraussetzung beruht: Hinter den mannigfaltigen *Qualitäten*, die die Erscheinungswelt zusammensetzen, gibt es eine *einheitliche Substanz*, die nur *quantitativer Unterschiede* fähig ist, die Erklärung der Erscheinungen liegt in der Erkenntnis der quantitativen in ihnen enthaltenen Beziehungen.

Dieser Gegensatz in der Art, die „Erklärung" aufzufassen, wird von DUHEM[1]) vom historischen Gesichtspunkt beleuchtet.

Unsere Kritik soll den Unterschied von „Quantität" und „Qualität", einen der schwierigsten, mit denen der Philosoph sich zu befassen hat, unter einem anderen Gesichtspunkte beleuchten.

Größen heißen diejenigen Gegenstände einer *Klasse*, für die die *Gleichheit* und die *Summe* definiert sind. Eine Folge dieser Definition ist die Möglichkeit, zwischen

---

1) „L'evolution de la mécanique", Revue général des siences 1903. S. 63, 119, 171, 247, 301, 352.

solchen Gegenständen ein *Verhältnis* zu definieren (das *Maß* der einen in bezug auf die andere).

Die Aussage, daß zwei Dinge einer gegebenen Klasse gleich sind, besagt, daß „man von gewissen unterscheidenden Eigenschaften absieht, um ihre gemeinsamen Eigenschaften zu einer abstrakten Vorstellung zusammenzufassen".

Der eigentliche Sinn der Summe ist das „Vereinigen" oder „Zusammensetzen" des einen „neben" das andere oder „hinter" das andere, wobei die Dinge als Teile oder Addenden betrachtet werden. Es ist deshalb die direkte Assoziation in Raum oder Zeit der Empfindungsgruppen nötig, die den summierten Teilen entsprechen.

Wir wollen einige Beispiele anführen.

§ 3. Beispiele: die Gewichte.

Die Entfernungen, Volumina und Gewichte bilden ebenso viele Klassen von Größen. Sie werden als solche gedacht, sobald die Begriffe der „gleichen Entfernungen", „gleicher Volumina" und „gleicher Gewichte" in Beziehung zu denen der „Summe" gebildet sind.

Wir wollen bei dem Beispiel der Gewichte stehen bleiben.

Nehmen wir eine Wage mit einer gewissen Belastung, und nehmen wir an, daß der Körper A, auf die Wagschale gelegt, der Belastung das Gleichgewicht hält. Wenn wir dann A durch den Körper B ersetzen, und das Gleichgewicht bleibt erhalten, so sagen wir, „daß die Gewichte von A und B *in bezug auf die gegebene Wage gleich* sind".

Die Bedeutung dieser Definition ist eine Assoziation und eine Abstraktion. Wir verteilen die Körper in der Weise auf Klassen, daß alle diejenigen in dieselbe Klasse kommen, die demselben Gewichte auf einer

bestimmten Wage das Gleichgewicht halten. Wir konstruieren so den abstrakten Begriff des „Gewichtes in bezug auf die Wage"; ein Begriff, in bezug auf den jedes Element einer Klasse durch jedes andere ersetzt werden kann. Die formalen Eigenschaften der Gleichheit (Kap. III § 14) spiegeln diesen psychologischen Abstraktionsprozeß wieder.

Wir wollen nun eine zweite Abstraktion vollziehen. Wir vergleichen verschiedene Wagen. „Wenn zwei Gewichte in bezug auf eine von ihnen gleich sind, so sind sie es auch in bezug auf eine beliebige andere." Man kann deshalb die Gewichtsgleichheit als eine *Beziehung zwischen den* verglichenen *Körpern* ansehen, die von einer speziellen Wage *unabhängig* ist.

Wir schreiten zur Definition der „*Summe*". Die Summe zweier Gewichte A und B ist das Gewicht des Körpers, den man erhält, wenn man A und B vereinigt, oder eines beliebigen anderen Körpers von gleichem Gewichte, durch den diese Vereinigung ersetzt werden kann.

„Wenn A und C gegeben sind, so existiert immer ein Gewicht B, das, zu einem von ihnen addiert, ein Gewicht ergibt, welches dem anderen gleich ist."

Daraus ergibt sich, daß die Gewichte als Größen, d. h. als Summen von Teilen betrachtet werden können.

Es geht aber hieraus nicht a priori hervor, daß „Summen von gleichen Gewichten gleich sind". Wenn nämlich A und A' in gleicher Weise einem gegebenen Gewicht auf der Wage das Gleichgewicht halten und ebenso B und B', so folgt daraus nicht, daß A durch A' auf der Wage ersetzt werden kann, die sich im Gleichgewicht befindet und auf der einen Schale das Gewicht $A + B$ trägt.

Aber bei der Mannigfaltigkeit der möglichen Konstruktionen erkennt man, daß diese Ersetzbarkeit in

der Unabhängigkeit des Gewichts von der Wage erhalten ist.

Wir haben hiermit die Grundbeziehungen, die gestatten, die Gewichte als eine „Klasse von Größen" anzusehen.

Man kann zur Definition dieser Klasse auf verschiedenen anderen Wegen gelangen und ihre Übereinstimmung schließt das Stattfinden von Tatsachen ein, die im allgemeinen im Begriff des Gewichtes vorausgesetzt werden. So können z. B. auf einer Wage (und hier ist es wesentlich, daß es sich nicht um eine Dezimalwage handelt) die Gewichte zweier Körper, A und B, unmittelbar verglichen werden, indem man sie auf die beiden Schalen legt. Das erste, was hier zu bemerken ist, ist, daß „das Gleichgewicht erhalten bleibt, wenn man A und B vertauscht" und folglich, „daß, wenn A B und C das Gleichgewicht hält, auch B und C einander das Gleichgewicht halten", und daß schließlich „das Gleichgewicht zwischen A und B von der speziellen Wage, auf die man sich bezieht, unabhängig ist". Damit haben wir die Grundeigenschaften, die der „Gewichtsgleichheit" zukommen.

§ 4. Die Wärmemenge.

Ein zweites Beispiel für die Definition einer Klasse von Größen bietet die Wärme.

Man kann die „Wärmemengen", die ein Körper bei einer Temperaturveränderung abgibt oder aufnimmt, definieren, indem man sich auf die Masse einer gegebenen kalorimetrischen Substanz bezieht, deren Temperatur gemäß der Abgabe oder Aufnahme zwischen zwei gegebenen Punkten schwankt. (Die Temperaturgleichheit wird dabei als definiert angenommen auf Grund des thermischen Gleichgewichts, wie wir später ausführen werden.)

Diese Art der Vergleichung führt direkt zu einer Feststellung dessen, was unter „gleichen“ Wärmemengen und unter der „Summe zweier Wärmemengen“ zu verstehen ist.

Man gelangt so zum Ausdruck eines Abstraktionsprozesses, der drei Grundtatsachen voraussetzt, die denen analog sind, denen wir im vorhergehenden Falle begegneten: die Unabhängigkeit der definierten Beziehung von der besonderen kalorimetrischen Bezugssubstanz; die Ersetzbarkeit der als gleich bezeichneten Wärmemengen bei der kalorimetrischen Vergleichung (die Transitivität der Gleichheit, Kap. III § 14) und endlich die Gleichheit der Summe von gleichen Größen.

Die Verifikation der erwähnten Tatsachen bildet die wesentliche Bedingung für die Möglichkeit des Verfahrens, das uns zur Definition der Größen führt.

In vielen Fällen jedoch ist dieser Prozeß unmöglich. Die Wärme selbst bietet uns ein Beispiel davon, wenn man versucht, nicht mehr die Wärmemengen, sondern die *Temperaturen* zu definieren.

In diesem Falle braucht man einen Vergleichskörper, das Thermometer, indem man immer von der Erscheinung des Wärmeaustausches zwischen zwei sich berührenden Körpern ausgeht. Auf Grund des thermischen Gleichgewichts werden die „gleichen Temperaturen“ definiert, und diese Beziehung erweist sich als unabhängig von dem Thermometer und besitzt die formalen Eigenschaften der Gleichheit.

Aber betrachten wir nun die Summe. Wenn man zwei gleichwarme Körper vereinigt, so erhält man nicht einen wärmeren Körper, die Temperatur verändert sich nicht.

Wir sind demnach verhindert, die Temperaturen als Größen, d. h. als Summen von Teilen, zu betrachten.

Um diesen Zweck zu erreichen, müßte man nicht den Begriff von „gleichen Temperaturen" besitzen, sondern denjenigen „gleicher Temperaturzuwächse".

Man könnte dann als Summe zweier Zuwächse von *A* bis *B* und von *B* bis *C* den Temperaturzuwachs betrachten, durch den man von *A* zu *C* übergeht, indem man die beiden Übergänge nacheinander ausführt.

Aber wenn auch jedes Thermometer für sich gestattet, gleiche Temperaturzuwächse zu definieren, so hängt doch diese Definition durchaus von der Wahl der Thermometersubstanz ab. Denn „Temperaturzuwächse, die gleichen Dilatationen einer gegebenen Substanz entsprechen, entsprechen ungleichen Dilatationen einer anderen"; und anderseits liegt in dem Begriff des Temperaturzuwachses kein sinnliches Datum, das zur Auswahl einer gewissen Gruppe von Thermometern berechtigte.

§ 5. Die Messung des Intensiven.

Welche Bedeutung hat nun die metaphysische Hypothese, die hinter jeder Veränderung der Erscheinungen ein quantitatives Substrat postuliert?

Nehmen wir z. B. an, daß die Wärme auf einer besonderen in den Körpern enthaltenen Flüssigkeit beruhe.

Für einen mit hinreichend scharfen Sinnen versehenen Beobachter wäre dann die Erwärmung begleitet von dem Anblick der Vermehrung der Flüssigkeitsmenge. Nehmen wir die Wärmeerscheinung in ihrer zusammengesetzten Gesamtheit. Ein Tasteindruck und eine Beobachtung durch den Gesichtssinn. Wenn wir dann von der ersten Empfindungsart absehen, so gelangen wir zu einer Vorstellung der Temperaturen als Größen, die der Dichte der Wärmeflüssigkeit proportional sind.

Die Hypothese der Wärmeflüssigkeit hat also die Bedeutung, daß sie uns zu der Annahme führt, daß mit der Temperatur ein quantitatives Element *wesentlich* verbunden ist. Allerdings erlaubt uns die Stumpfheit unserer Sinne nicht, dasselbe zu erkennen: ein glücklicher Umstand, der uns verhindert, die metaphysischen Hypothesen auf die Probe zu stellen. Aber es bleibt das Vertrauen, daß man zwischen den verschiedenen möglichen Assoziationen der Erscheinung eine Gruppe *auszeichnen* kann, aus der sich eine indirekte Konstatierung ihres hypothetischen Substrats ergibt. Außerdem führt uns die Vorstellung der Wärmeflüssigkeit, wie wir sehen werden, zu einer konkreten Wahl.

Dieselbe Rolle spielt im allgemeinen die CARTESische Hypothese für die *Messung des Intensiven.*

Es sei in einer Erscheinungsreihe der Sinn der *Gleichheit* und des *größer* festgestellt, so daß man durch Abstraktion eine *Reihe von Intensitätsgraden* erhält. Nun können diese Grade den Zahlen oder den wachsenden Größen einer Klasse zugeordnet werden. Die CARTESische Hypothese erlaubt eine solche Zuordnung und leitet sie in jedem Falle der konkreten Vorstellung in einem nicht willkürlichen Sinne.

Hierbei muß man überlegen, daß das Vertrauen, ein mit dem Wesen der Erscheinungen zusammenhängendes Maß des Intensiven zu finden, die Wirkung hat, daß man einer bestimmten Messung den Vorzug gibt.

Wenn auch diese Assoziationen keine besonders bemerkenswerte reale Bedeutung haben, so ist doch schon die Tatsache, daß sie zu einer Messung führen, ein wichtiges Ergebnis, das von DUHEM folgendermaßen beurteilt wird (l. c. S. 301):

„Cette extension de la notion de mesure, cet emploi du nombre comme symbole d'une chose qui n'est pas quantitative, eût sans doute étonné et scandalisé les

péripatéticiens de l'Antiquité. Là est le progrès le plus certain, la conquête la plus durable que nous devions aux physiciens du XVII[e] siècle et à leurs continuateurs; ... ils ont établi cette vérité, d'un prix inestimable: *Il est possible de discourir des qualités physiques dans le langage de l'Algèbre.*"

§ 6. Das natürliche oder absolute Maß: die Temperatur.

Aber, wie wir sagten, führt die metaphysische Hypothese des Descartes nicht nur zu einer quantitativen Vorstellung oder zu einer Messung des Intensiven, sondern sie erhebt auch den Anspruch, die fast unbegrenzte Willkürlichkeit der Assoziationen, die imstande sind, sie zu liefern, zu beseitigen und will so eine bevorzugte, d. h. ***natürliche*** oder ***absolute*** Messung liefern.

Kehren wir zum Beispiel der Temperatur zurück!

Da ihre Messung vom Thermometer abhängt, so wird sie definiert bis auf eine Substitution

$$\tau = f(t)$$

wo f eine beliebige wachsende Funktion bezeichnet.

Nun läßt uns aber die Hypothese der Wärmeflüssigkeit den Gedanken einer ***absoluten*** Temperaturmessung fassen, d. h. sie läßt uns untersuchen, „ob mit den Veränderungen, die die Körper bei der Erwärmung erleiden, irgendeine Größe verbunden ist, die von der Qualität des Körpers nicht abhängt und daher bei verschiedenen Körpern zwischen gleichen Temperaturen um den gleichen Betrag wächst".

In der Tat, wenn man diese Hypothese annimmt, so wird die in einem Körper enthaltene Wärmemenge Q eine Menge der Flüssigkeit sein, die dem eingenommenen Volumen und der Dichtigkeit t proportional ist, und t wird die absolute Temperatur darstellen.

Die Hypothese der Wärmeflüssigkeit führt also zu der Annahme, daß die Wärmemengen, die bei dem Übergange von gleichen zu gleichen Temperaturen von verschiedenen Körpern aufgenommen oder abgegeben werden, einander proportional sind.

Diese Folge bestätigt sich zwar nicht allgemein, aber sie bestätigt sich in dem *Grenzfall* reversibler *(adiabatischer)* Transformationen, für die die Bedingung der Unzerstörbarkeit der Wärme, die in der Hypothese vorausgesetzt war, sich realisiert.

Und das wichtigste ist, daß die positive Definition der *absoluten Temperatur*, zu der man durch die reversiblen Transformationen geführt wird, sich als unabhängig erweist von der Hypothese der Wärmeflüssigkeit, sie bleibt als Ausdruck einer Tatsache bestehen, obgleich jene Hypothese sich als ungeeignet erweist zur Erklärung der Verwandlung von Wärme in mechanische Arbeit und der umgekehrten Erzeugung von Wärme durch die Reibung oder den Stoß der Körper, usw.

Die Tatsache, die bei der Definition der absoluten Temperatur vorausgesetzt wird, kann vermittelst verschiedener Hypothesen erkannt werden, z. B. mittels der *kinetischen Gastheorie* (vgl. § 10), wo als absolute Temperatur der Mittelwert der lebendigen Kraft der bewegten Gasmoleküle betrachtet wird.

Diese beiden Darstellungen enthalten gleichermaßen jene Tatsache, insofern sie gewisse Verknüpfungen zwischen den Sinnesdaten ausdrücken. Aber sie decken sich nur teilweise und die zweite Darstellung gibt noch mehr, nämlich die Fixierung des *Nullpunktes*, so daß die Temperatur bis auf einen Faktor, der von der Wahl der Maßeinheit abhängt, definiert ist, während sie bei der ersten Darstellung nur bis auf eine lineare Substitution

$$\tau = a t + b$$

bestimmt ist.

Und die Bedeutung dieser Wahl eines absoluten Nullpunktes ist die Erkenntnis eines *Maximums* von Wärmemenge (oder von Arbeit), die ein Gas liefern kann.

Wir machen schließlich noch darauf aufmerksam, daß die fundamentale Tatsache, die der Definition der absoluten Temperatur zugrunde liegt, vermöge der kinetischen Theorie ergänzt wird durch die Erkenntnis, daß die Wärmemengen, die von verschiedenen Gasen aufgenommen oder abgegeben werden, den Temperaturveränderungen und folglich untereinander (JOULEsches Gesetz) und den respektiven Dilatationen proportional sind, woraus sich eine Übereinstimmung der Gasthermometer ergibt, die allerdings nur mit dem Grade von Annäherung besteht, mit dem die kinetische Theorie in ihrer einfachsten Form anwendbar ist.

§ 7. Zusammenfassung und Kritik.

Aus der vorstehenden Diskussion können wir den folgenden Schluß ziehen: Die Darstellung einer Reihe von Erscheinungsdaten als Größen ist das Ergebnis eines gewissen Assoziations- und Abstraktionsprozesses, der gewisse Tatsachen voraussetzt. Der Erfolg des Verfahrens bei jeder Assoziation ist an die Geltung dieser Tatsachen gebunden. Aber, wo diese nicht gelten, läßt es sich ermöglichen, indem man die Assoziationen selbst erweitert, d. h. indem man den Erscheinungsdaten andere quantitative Daten entsprechen läßt, die in der Wirklichkeit mit ihnen verbunden sind.

Immerhin bleibt die so erhaltene quantitative Darstellung eine *willkürliche* Vereinbarung, solange man nicht eine *Gruppe von Assoziationen auszeichnet*, in bezug auf welche diese Vereinbarung einen *invarianten* Charakter hat.

Die metaphysische Hypothese drückt das allgemeine Vertrauen aus, derartige Invarianzen (*natürliche* oder

absolute Maße) erkennen zu können, und sie treibt die Untersuchung so weit, bis sie sich zu einem geeigneten *System von Bildern* ausgestaltet hat.

Aber mehr noch, diese Hypothese erleichtert die Betrachtung der erscheinungsmäßigen Beziehungen, an die sich unsere Erwartungen knüpfen, indem sie dieselben durch *quantitative Beziehungen* zwischen den (natürlichen) Maßen gewisser Daten ausdrückt, und die Bilder verhelfen zu dieser *analytischen Darstellung* der physikalischen Realität, sei es, indem sie uns zur Erkenntnis der genannten Beziehungen führen, sei es, indem sie ihre Deutung erleichtern. Darin besteht der Wert der metaphysischen Hypothese für den Fortschritt der Wissenschaft.

Allerdings haben wir auf diese Weise die Metaphysik der Größe gedeutet, indem wir ihren positiven Gehalt hervorhoben. Diese Metaphysik erhebt aber außerdem den Anspruch, daß die Bilder einer *unzugänglichen und allgemeinen Wirklichkeit* entsprechen.

Sie nimmt also vor allem an, daß ihre Hypothesen den Wert von Tatsachen haben, d. h. daß *aus ihnen mögliche Wahrnehmungen eines mit hinreichend feinen Sinnen versehenen Beobachters folgen*, in zweiter Linie, daß sie einen konkreten Ausdruck finden *können*, der geeignet ist, von *allen* möglichen Beziehungen zwischen den verschiedenartigsten Erscheinungen Rechenschaft zu geben.

Wer den ersten Anspruch in positivem Sinne verstehen wollte, würde dadurch die Konstruktion der Bilder sehr stark beschränken. Eine vergleichende Prüfung der wirklich konstruierten Bilder zeigt aber sofort, daß diese Grenzen durchaus nicht respektiert werden, daß diese Hypothesen, anstatt die gedachten Empfindungen nur zu verschärfen, sie widernatürlich machen, daß man, wenn man mit ihnen arbeitet, gezwungen ist, eine Reihe

von widersprechenden Folgerungen auszuschließen, denen man nicht entgehen könnte, wenn man ihnen einen tatsächlichen Inhalt zuschriebe (vgl. Kap. I).

Wenn man demnach festhält, daß die metaphysische Hypothese in jedem ihrer konkreten Ausdrücke ein *Modell* darstellt, das geeignet ist, eine gewisse Art von wirklichen Erscheinungen abzubilden, so bleibt noch zu untersuchen, ob es denkbar ist, daß man zu einem einzigen Modell gelangt, das der *universellen Wirklichkeit* adäquat ist.

Die Unsinnigkeit dieser Behauptung wird klar, wenn man die *partiellen Modelle* als Resultate von Assoziationen und Abstraktionen betrachtet; denn ein *universelles Modell* würde eine transzendente Erweiterung dieses psychologischen Prozesses erfordern.

Wenn wir zur Prüfung der Einzelheiten herabsteigen, so werden wir noch besser sehen, wie die Konstruktion eines Modells immer zur Herstellung eines Parallelismus zwischen zwei Erscheinungsreihen dient und demnach notwendig eine *relative* und *eingeschränkte* Bedeutung hat, insofern keine Reihe als absolut isoliert von allen anderen betrachtet werden kann. Noch anderes wäre zu sagen über die CARTESIsche *Substanz*, die qualitativer Unterschiede bar ist. Aber wenn auch derartige Einwände unbekannt wären, was hätte es für einen Wert, einen Philosophen zu widerlegen? Nichts ist leichter, aber auch unnützer, hat SCHOPENHAUER gesagt.

Die Metaphysik der Größe bleibt, wenn sie auch als solche nicht angenommen werden kann, immer der leitende Gedanke einer sich auf Jahrhunderte erstreckenden Bewegung, die wir in einem positiven Sinne als psychologischen Assoziationsprozeß erklärt haben. Man muß deshalb untersuchen, in welcher Weise sie sich konkret einer *Physik* unterordnet, *die als eine Erweiterung der Mechanik betrachtet wird.*

Wir wollen deshalb die theoretischen Entwickelungen überschauen, die durch eine dynamische Betrachtung der physikalischen Erscheinungen nach einer Fixierung der *quantitativen* Beziehungen einiger als charakteristisch betrachteten Daten streben, und die in diesen Beziehungen die vollkommene Bestimmung der Tatsachen erblicken.

Wir nehmen uns also vor, folgendes hervorzuheben und zu erklären:

1. das Streben nach Reduktion der Grunddaten der Mechanik und ihre eigentliche psychologische Bedeutung;
2. in welcher Weise und bis zu welchem Grade diese Entwickelung zu einer Bestätigung oder Korrektion der Postulate der Mechanik führt;
3. den Erkenntniswert und die heuristische Bedeutung der mechanischen Modelle.

§ 8. Die beiden Formen des Mechanismus: die Cartesische und die Newtonsche.

Die Daten der Mechanik sind qualitativ verschieden; es sind *extensive*, geometrische und kinematische Daten und *intensive* dynamische Daten (die Kräfte). Die innere Entwickelung der Philosophie der Mechanik richtet sich auf ihre fortschreitende Reduktion.

Bei dem eigentlich CARTESIschen Plan sucht man die intensiven Daten auf die extensiven zurückzuführen, durch die man unmittelbar die quantitative Darstellung mit Bezug auf die Gesichtswahrnehmungen erhält. In diesem Sinne fordert man eine *Erklärung der Kräfte.* Demgegenüber zählt die NEWTONsche Schule die Kräfte als elementare Wirkungen der Teilchen der Körper aufeinander zu den ursprünglichen Daten und versucht sie zu vereinheitlichen und aus ihnen die Erklärung anderer extensiver Daten abzuleiten, speziell will sie mittels der Kräfte *die Verbindungen erklären.*

Die beiden Typen des Mechanismus stellen einen Unterschied in der Auffassung dar, der unter verschiedenen Gesichtspunkten beleuchtet werden kann:

1. Der Typus der CARTESischen Darstellung ist ein ausschließlich *optisches Modell*, während das NEWTONsche Modell der physischen Wirklichkeit vornehmlich mit *Tast-* und *Muskelempfindungen* operiert.
2. Die CARTESische Form entspricht der *assoziativen Phase* des wissenschaftlichen Verfahrens, die NEWTONsche Form vielmehr der *abstraktiven Phase*. Demnach ist die quantitative Darstellung der Erscheinungen für die Cartesianer ein Ergebnis, dessen *Entstehung* man erklären muß und die Gesichtsassoziationen geben davon eine *klare* und *deutliche* Anschauung. Demgegenüber wird diese Darstellung von den Newtonianern oft in weiterem Sinne aufgefaßt als ein *aktuelles* Gegebenes, das man verwendet, und dessen Anwendungen man verfolgt.
3. Der CARTESische Typus entspricht vor allem der *inneren Entwickelung* der Philosophie der Mechanik, der NEWTONsche vielmehr der *äußeren*.

Die CARTESische Tendenz, die Vorstellungen im optischen Sinne zu polarisieren, muß als ein Versuch erklärt werden, die Sinnesdaten zu *vereinheitlichen*; denn die Gesichtsbilder nehmen im allgemeinen bei den psychologischen Konstruktionen einen hervorragenden Platz ein und können jedenfalls nicht durch die Anschauung der Kräfte der Bewegung usw. eliminiert werden.

Demgegenüber muß die NEWTONsche Tendenz, ein Modell für den Tastmuskelsinn zu konstruieren, das sich in einer abstrakten Konstruktion der Gesichtsanschauung superponiert, als der Versuch angesehen werden, die Sinnesdaten in *extensiverer* Weise zu assoziieren.

Die erste Tendenz hat also einen vorzüglich *ökonomischen* Wert für die fertige Wissenschaft und einen *psychologischen* als Anreiz für die Untersuchung; die zweite entspricht mehr der Aufgabe der wissenschaftlichen *Voraussage*. Aber vor allen Dingen liegt der Erfolg der beiden Tendenzen in ihrer Abwechslung.

Und so schlichtet die positive Erkenntnistheorie den Streit vom höheren Gesichtspunkt des wissenschaftlichen Fortschritts!

Wenn man nämlich als höchstes Ziel die einheitlichere und erweiterte Assoziation der verschiedenen Sinnesdaten betrachtet, so wird man erkennen, daß die Abwechslung der beiden Entwickelungstendenzen uns diesem Ziele näher gebracht hat.

Den ersten Versuchen im CARTESIschen Sinne verdanken wir vor allem die kinetische Gastheorie. Aber die weitere Entwickelung der Untersuchungen über die Elastizität (sei es das Suchen nach einer genaueren Darstellung der Eigenschaft dieser Gase, sei es speziell die einer Darstellung der festen und flüssigen Körper) findet ihren konkreten Ausdruck in einer Erklärung nach dem NEWTONschen Typus. Diese erhebt sich, indem sie sich kompliziert, zur mechanischen Wärmetheorie und schließlich zu der abstraktesten Form der energetischen Mechanik, wobei allerdings die Untersuchungen über die Lokalisation und die Bewegung der Energie (die mit den Fortschritten der elektrischen Theorien zusammenhängen) wieder zu der entgegengesetzten Tendenz nach dem CARTESIschen Modell führen.

Ein Fortschritt der mechanischen Erklärung im CARTESIschen Sinne ist deutlicher in den optisch-elektromagnetischen Theorien zu erkennen. Von MAXWELL, W. THOMSON usw. wird der Begriff der Verbindung weiter ausgedehnt. Das Gesichtsbild des Atoms erhält

in den neuesten Entwickelungen eine größere Bedeutung, und doch macht sich die entgegengesetzte Tendenz in einem elektrischen Modell der Dynamik geltend.

Wenn nun auch eine so mannigfaltige und große Gedankenentwickelung nicht zu einem einheitlichen Ergebnis führt, so kann man doch zusammenfassend sagen, daß diese Entwickelungen einerseits zu einer *Vereinheitlichung der Kräfte*, anderseits zu einer *erweiterten Anwendung der Verbindungen* geführt haben, so daß sie sich in verschiedener Weise in einer einheitlicheren und ausgedehnteren Assoziation der Sinnesdaten einander genähert haben.

Diese Betrachtungen werden durch eine Prüfung der verschiedenen Entwickelungen, die sich in den verschiedenen Disziplinen der Physik vollzogen haben, klarer werden. Aber vor allem wird diese Prüfung uns zeigen, daß die mannigfachen partiellen Fortschritte eine kritische Periode der Wissenschaft rechtfertigen, indem der Mangel einer Verifikation eine neue induktive Entwickelung der Mechanik zu erfordern scheint.

§ 9. Die Zurückführung der Kräfte auf den Stoß: die Gravitation.

Die Versuche, die Kraft zu *erklären*, waren im 17. Jahrhundert an der Tagesordnung. Unter dem Einfluß von GASSENDI, DESCARTES, HUYGHENS versuchte man die dynamischen Eigenschaften der Materie zu erklären, indem man auf die antiken Bilder des DEMOKRIT und des EPIKUR zurückgriff: bewegte *Körperchen*, ihr *Stoß* und *Wirbelbewegungen* der umgebenden Flüssigkeiten.

In diesem Gedankengang ist besonders die Hypothese zu bemerken, nach der die allgemeine Gravitation durch den Stoß *kleiner Körper* entsteht, auf der der Erklärungsversuch von FATIO DE DUILLIERS beruht, der später von LESAGE erneuert wurde.

Was bedeutet eine solche Erklärung der Kraft?

Wir beobachten elastische Körper, die bei ihrer Bewegung einander stoßen. Es erscheinen drei Momente des Phänomens: Bewegung, Kraft und wieder Bewegung. Die Kraft, die aus dem Gebiete des Sichtbaren heraustritt, welches sich nacheinander als „Wirkung" und als „Ursache" darstellt, kann in Gedanken von demjenigen unterdrückt werden, der die beiden Momente der Bewegung verbindet, indem er sie durch die deskriptiv betrachtete Tatsache des Stoßes miteinander verknüpft. Man erhält so eine Folge von Gesichtsbildern, deren einmal erkannte Beziehung, die gegebene „Kraft" zu eliminieren und in diesem Sinne zu erklären erlauben würde.

Die Schwierigkeit entsteht bei der Bestimmung dieser Beziehung ohne Benutzung eines Tastmuskelbildes. Wenn man dagegen zu einem solchen greift, indem man die Elementargesetze des Stoßes auf die Betrachtung der elastischen Kräfte gründet, so hat offenbar das erreichte Ergebnis nur einen relativen Reduktionswert.

Bei den Hypothesen von Fatio und Lesage würde diese Reduktion wesentlich sein. Die Newtonsche Kraft, die in der Entfernung wirkt, wäre dargestellt als Wirkung elementarer Kräfte, die in der Berührung wirken (gemäß dem Fortschritt, den im allgemeinen die Darstellung der Ursache anstrebt). Daraus würde sich im speziellen eine Korrektion der Newtonschen Theorie ergeben durch Einführung einer „endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation". Eine Hypothese, die im übrigen bis heute noch keine konkrete Gestalt angenommen hat, die mit den Beobachtungen der Planetenbewegung übereinstimmte (vgl. Kap. V § 29), aber die, wie wir sehen werden, in unseren Tagen in neuer Form wieder erscheint.

§ 10. Die kinetische Gastheorie.

Daniel Bernoulli benutzte im Jahre 1738 in ähnlicher Weise die Stöße beweglicher Partikel zur Erklärung des Gasdrucks. So entstand die *kinetische Gastheorie*, die ein Jahrhundert später von Krönig und Clausius (1856-57) wieder aufgenommen und von Maxwell, Boltzmann und van der Vaals zu größerer Vollkommenheit ausgebildet wurde.

Nach der ursprünglichen Vorstellung Bernoullis bewegten sich die elementaren Körperchen des Gases in gerader Linie bis zum Zusammenstoß mit der Wand des Gefäßes, alle mit einer gleichen und gleichförmigen Geschwindigkeit, aus der sich in natürlicher Weise ein Maß für die Temperatur ergab. Diese Ansicht mußte korrigiert werden, wenn man die Stöße der Moleküle untereinander berücksichtigen wollte, die nicht vernachlässigt werden können, wenn man diesen eine nicht verschwindende Ausdehnung zuschreibt. Durch die Wirkung dieser Stöße müssen die molekularen Geschwindigkeiten, wenn sie auch im Anfang als gleich vorausgesetzt werden, in weiten Grenzen verschieden und als solche in Rechnung gezogen werden.

Es handelt sich dann darum, die mittleren Wirkungen der Erscheinung nach den Gesetzen der *Wahrscheinlichkeit* darzustellen. Speziell liefert der Mittelwert der lebendigen Kraft das natürliche (oder absolute) Maß der Temperatur gemäß dem Jouleschen Gesetz.

Die Folgen dieser Voraussetzungen sind sehr bemerkenswert[1]). Wenn man von den molekularen Dimensionen absieht, so erhält man als *erste Annäherung* die Gasgesetze, die durch die Formel

$$pv = RT$$

1) Vgl. L. Boltzmann: „Vorlesungen über Gastheorie". Leipzig 1896/98.

ausgedrückt werden (p = Druck, v = spezifisches Volumen, T = Temperatur und R = einer Konstanten für alle Gase).

Es sind dies die Gesetze von Boyle, Gay-Lussac und Avogadro für die sog. *vollkommenen Gase*.

Dazu kommt die wichtige Beziehung zwischen den beiden spezifischen Wärmen für konstantes Volumen und konstanten Druck (c_p, c_v) und dem Molekulargewicht (μ):

$$c_p - c_v = \frac{R}{\mu}.$$

Diese Gesetze werden für die wirklichen Gase von der Erfahrung nicht genau bestätigt. Die Abweichungen in verschiedenem Sinne, die mit mannigfachen Bedingungen zusammenhängen, erfordern eine Erklärung, indem man die Theorie für einen *zweiten Annäherungsgrad* aufstellt und, wie Bernoulli vorausgesehen hat, erhält man schon eine Korrektion, wenn man die Dimensionen der Moleküle berücksichtigt, aber diese ist weit entfernt davon, den Anforderungen des Experimentes zu genügen. Offenbar muß man eine weitere Korrektion suchen, indem man sich auf die Vorstellung dieses Moleküls selbst bezieht, das als eine elastische undurchdringliche Kugel angesehen wurde.

Dieses etwas grobe Bild wird modifiziert werden müssen. In welchem Sinne?

Das Molekül erscheint schon in der Chemie als ein zusammengesetztes mechanisches System, sobald gewisse Erscheinungen die Annahme einer Dissoziation in Ionen nahelegen. Demgemäß benutzte man zur Vervollkommnung der kinetischen Theorie die Hypothese eines mit der Temperatur veränderlichen Wirkungsfeldes von Repulsivkräften, die innerhalb dieses Feldes zwischen den Molekülen wirken. Man richtete auch die Aufmerksamkeit auf ein spezielles Gesetz ($1 : r^6$).

Diese Entwickelungen entfernen sich, wie jeder sieht, von dem CARTESIschen Mechanismus, der sich nach der ursprünglichen Idee dazu eignen sollte, die Kraft zu erklären, welche aus dem Gasdruck entsteht. Sie bezeichnen jedoch einen extensiven Fortschritt der Theorie beim Studium der Eigenschaften der Gase, obgleich ihre Gründer darin übereinstimmen, daß sie den angenommenen Hypothesen einen nur provisorischen Charakter zuschreiben.

§ 11. Die Elastizitätstheorie: die festen Körper.

Nehmen wir anderseits an, daß der einfache Mechanismus, der auf der Hypothese des Stoßes elastischer Kugeln beruht, sich als geeignet erwiesen hätte, das Studium der Eigenschaften der Gase in Übereinstimmung mit den genauesten Experimenten theoretisch fortzuführen.

Nichtsdestoweniger könnte auch dann die elastische Kraft der Gase nicht als vollkommen *erklärt* betrachtet werden, es sei denn, daß man die *Elastizität der festen Körper* als gegeben betrachtet. Von dieser muß man nämlich, wie wir schon bemerkten, notwendig Gebrauch machen, um die Stoßgesetze zu erklären, wenn man diese nicht in abstrakter Weise als ein rein optisches Faktum betrachten will, wobei man das wesentliche Moment der Erscheinung vernachlässigen würde.

Zu derselben Vorstellung gelangt man, wenn man versucht, sich die physikalische Natur der *Verbindungen* allgemeiner vorzustellen, indem man sie auf Kräfte, die zwischen den einzelnen Punkten des Körpers wirken, zurückführt (Kap. V § 24), und indem man speziell die angenäherte Starrheit der festen Körper, die Inkompressibilität der Flüssigkeiten und die daraus sich ergebenden elastischen Reaktionen in diesem Sinne zu erklären sucht.

Die Schwierigkeiten, sich eine derartige Vorstellung von dem festen oder flüssigen Aggregatzustand der Materie zu machen, erscheinen größer als im Falle der Gase.

Wir wollen mit wenigen Strichen die Geschichte dieses Gegenstandes zeichnen.

Angeregt durch die astronomische Theorie NEWTONS und durch einige Bemerkungen dieses Mannes über die Erscheinungen der Kapillarität hat BOSCOVICH (1763) eine allgemeine Vorstellung der Materie erdacht, als eines mechanischen Systems von *Massenpunkten*, die aufeinander Wirkung und Gegenwirkung ausüben, die gleich und entgegengesetzt sind und für jedes Punktepaar die Richtung ihrer Verbindungslinie haben und von ihrer Entfernung abhängen *(Zentralkräfte)*.

Diese Theorie wurde bis zur Behandlung konkreter Probleme von der LAPLACEschen Schule weitergeführt. Diese bildete besonders die Erklärung der Kapillaritätserscheinungen, die von verschiedenen Vorgängern nach dem NEWTONschen Plan behandelt worden waren, zu einem hohen Grade der Vollkommenheit aus.

Und diese Richtung führte bei POISSON zu der Konstruktion einer Theorie, die unter dem Namen der *physikalischen Mechanik* der *analytischen Mechanik* des LAGRANGE entgegengesetzt ist und den Begriff der Verbindung systematisch auf den der Kräfte zurückzuführen sucht.

Im Jahre 1821 unterwarf NAVIER zum erstenmal die Prinzipien der Theorie der Elastizität der festen Körper einer analytischen Behandlung, indem er sich dem POISSONschen Verfahren anschloß. Diese Theorie wurde später in verschiedenen Richtungen von CAUCHY, POISSON, GREEN und LAMÉ weiterentwickelt.

Es ist wichtig, die Ergebnisse dieser Untersuchungen etwas näher zu prüfen. Denken wir uns die folgenden Hypothesen zugrunde gelegt:

a) 1. Die materiellen Punkte, aus denen ein fester Körper besteht, befinden sich im Gleichgewichtszustand in Ruhe.
2. Die Verteilung der Materie ist homogen.
3. Die inneren Kräfte entstehen aus elementaren Wirkungen zwischen den Teilen des Körpers und sind zentral.

Man kann dann die *Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer fester Körper* hinschreiben und in diesen kommen 15 voneinander unabhängige Koeffizienten vor. Wenn der Körper *isotrop* ist, so reduzieren sich die Koeffizienten auf einen einzigen, und man findet speziell, daß der Koeffizient der kubischen Kompressibilität und der des Zuges sich wie 3 : 2 verhalten.

Diesen Folgerungen aus der Theorie von NAVIER und POISSON stehen die Ergebnisse der allgemeineren Behandlung des Problems nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit (Kap. V § 26) entgegen.

Es werde angenommen, daß:

b) 1. die Punkte eines festen elastischen Körpers außer den äußeren und den Massenkräften *inneren Kräften* unterworfen sind, über deren Ursprung man keine Annahme macht;
2. die Arbeit der inneren Kräfte von der Deformation des Volumenelementes abhängt und deshalb, wenn man von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung absieht, sich durch eine quadratische Form in den sechs Deformationskomponenten, d. h. in den Veränderungen der Seiten und Winkel eines Parallelepipeds ausdrücken.

Dann führt (nach GREEN) das Prinzip der virtuellen Arbeit zu allgemeineren Elastizitätsgleichungen, in denen statt 15 21 unabhängige Koeffizienten vorkommen; im Falle der isotropen Körper hat man *zwei* unabhängige

Koeffizienten, deren Verhältnis einen beliebigen Wert haben kann.

Nun entspricht die größere Allgemeinheit in dieser Theorie in Wahrheit unmöglichen Fällen. Während nämlich die Elastizitätskoeffizienten der Metalle bis zu einem gewissen Grade mit den Voraussagen der ersten Theorie übereinstimmen, so findet der Fall eines fast imkompressiblen festen Körpers, wie der Gelatine, darin keinen Platz.

Es bleibt deshalb zu erklären, in welcher Weise die Hypothesen a) modifiziert werden müssen.

Zu diesem Zwecke hat man eine Abänderung der Hypothese 3. vorgeschlagen, die auch in einigen der angesehensten neueren Lehrbüchern vorkommt. Sie besteht in folgenden Annahmen:

3'. Die Kraft, die auf einen Massenpunkt des festen Körpers wirkt, hängt *von der Gesamtheit* der benachbarten Teile ab und kann nicht zerlegt werden in eine Resultante von elementaren Wirkungen, oder

3''. Die Kräfte, die zwischen den Punkten des festen Körpers wirken, sind keine Zentralkräfte.

Diese Hypothesen widersprechen direkt der klassischen Statik. Die erste leugnet das Prinzip der Resultante, die zweite das statische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung!

Man hat natürlich versucht, einem solchen Ergebnis auszuweichen. Poisson machte schon einen derartigen Versuch, indem er die *Formen* der Partikelchen berücksichtigte; aber allerdings erscheinen derartige Betrachtungen ein wenig künstlich.

W. Thomson hat eine befriedigendere Lösung gezeigt, indem er vorschlug, die Hypothese a) 2. oder a) 1. und vor allem diese letztere zu modifizieren.

Die Annahme, daß die Massenpunkte eines festen Körpers beim Gleichgewicht wirklich in Bewegung sind,

d. h. daß da, wo wir Ruhe sehen, es sich um ein *statistisches Gleichgewicht* handelt, im Sinne der kinetischen Gastheorie, ist eine Art, die Schwierigkeit zu beseitigen, die auf den ersten Blick kühn erscheinen könnte, die aber durch die mechanische Wärmetheorie eine Bestätigung erhält.

Wenn wir diese Modifikation annehmen, so kann man die Zentralkräfte, die zwischen den bewegten Punkten wirken, nicht in jedem Moment durch gleichfalls zentrale Kräfte ersetzen, die zwischen ihren mittleren Lagen wirken. Dadurch erklären sich die Hypothesen 3'- und 3''. als schematische Vereinfachungen der Darstellung.

Aus der vorstehenden Diskussion ergibt sich, in welcher Weise die Hypothese eines NEWTONschen Mechanismus die Elastizität der festen Körper in demselben Sinne zu erklären erlaubt, wie das Prinzip der virtuellen Arbeit.

Und das, was wir für die festen Körper gesagt haben, könnte man für die flüssigen wiederholen.

Immerhin wird man dieser *kinetischen Theorie der Materie* den Vorwurf machen, daß sie im allgemeinen wenig fruchtbar an positiven Konsequenzen ist, obgleich die Darstellung, die sie liefert, sich an die mechanische Wärmetheorie anschließt.

Wir werden im kurzen auf diesen Gegenstand zurückkommen. Zunächst wollen wir aber einen Einwand prüfen, der der allgemeinen Elastizitätstheorie entgegengehalten wird und der durch die Erfahrung angeregt wird.

§ 12. Bleibende Veränderungen.

Die Grundhypothese, die gestattet, die Arbeit der inneren Kräfte eines elastischen Körpers bei einer unendlich kleinen Deformation zu berechnen, besteht in der Annahme, daß diese für jedes Element von der

augenblicklichen lokalen Deformation abhängt und nicht von derjenigen des übrigen festen Körpers und auch nicht von der Reihe der *vorhergehenden Konfigurationen*, durch die der feste Körper selbst hindurchgegangen sein mag.

Eine unangenehme Folge dieser Hypothese ist, daß, wenn die deformierende Kraft zu wirken aufhört, der elastische Körper seinen ursprünglichen Zustand (den *natürlichen*) wieder annehmen muß, und daß im allgemeinen die elastischen Deformationen, die er erleidet, seine Elastizität nicht beeinflussen dürfen.

Nun widersprechen diesen Folgerungen direkt die *bleibenden Veränderungen*, die man nach Analogie mit den von Ewing als *magnetische Hysteresis* bezeichneten Erscheinungen auch als Erscheinungen der *elastischen Hysteresis* bezeichnet, und es handelt sich dabei um einen Widerspruch, der die Grundlage der mechanischen Theorie der Elastizität berührt.

G. Robin hat in seinen Vorlesungen über allgemeine Thermodynamik den Umstand betont, daß die Prinzipien der Mechanik eine Hypothese der *Nichterblichkeit* enthalten. Denn es wird darin postuliert, daß der zukünftige Zustand eines Systems von den *augenblicklichen* statischen Bedingungen abhängt. Und in einigen überzeugenden Abschnitten seines neuesten Buches über „La science moderne et son état actuel"[1]) entwickelt E. Picard interessante Betrachtungen über eine Mechanik, in der man im Gegenteil die *Erblichkeit* zu berücksichtigen hat: gewisse *Funktionalgleichungen* würden dann an Stelle der klassischen *Differentialgleichungen* treten.

Die bleibenden elastischen Veränderungen, wie im allgemeinen die Erscheinungen der Hysteresis, scheinen eine solche tiefgehende Modifikation zu erfordern.

---

1) Paris, Flammarion.

Aber es ist nicht ausgeschlossen, daß es sich nur um Fälle von *scheinbarer Erblichkeit* handelt.

Um diese Fälle in der klassischen Mechanik unterzubringen, genügt in der Tat die Annahme, daß man nicht *alle* in Betracht kommenden Elemente, welche die Erscheinung bestimmen, berücksichtigte, d. h. es genügt, das System als *Teil eines umfassenderen Systems* zu betrachten, auf welches die mechanischen Postulate Anwendung finden.

Diese Art, die Schwierigkeit aufzulösen, könnte zu vielen Überlegungen Anlaß geben. Wir wollen aber für den Augenblick diese *abweichenden Fälle* beiseite lassen, indem wir uns vorbehalten, sie später bei den Endergebnissen unserer Kritik wieder in Betracht zu ziehen.

Und wir wollen von der kinetischen Theorie der Materie zu den thermodynamischen Entwickelungen übergehen, die sich daran knüpfen.

§ 13. Die mechanische Wärmetheorie: die Erhaltung der Energie.

Wenn, wie schon DESCARTES annahm, die Wärme eine ungeordnete Bewegung der elementaren Teilchen der Materie ist und diese Bewegung sich durch Zentralkräfte erklären läßt, so muß ein *mechanisches Wärmeäquivalent* existieren. Diese Folgerung ist implizite in dem Prinzip der lebendigen Kräfte (Kap. V § 28) enthalten. Sie geht um ein Jahrhundert der Entdeckung der *Erhaltung der Energie* voraus.

Über das Verdienst an dieser Entdeckung herrscht zwischen verschiedenen Forschern Streit, und an die Frage der Priorität knüpft sich das für den Philosophen interessantere Problem der Erkenntnis des Zusammenhanges zwischen der theoretischen Spekulation und der

experimentellen Forschung. Ohne nun in eine allzu genaue Erörterung einzutreten, wollen wir folgendes sagen:

Die Vorstellung der *Wärmeflüssigkeit*, durch die die ersten kalorimetrischen Untersuchungen von Black und Crawford veranlaßt waren, ist als der Hauptgrund dafür anzusehen, daß die Erkenntnis der Äquivalenz zwischen Wärme und Arbeit derjenigen des Prinzips der lebendigen Kräfte erst so spät gefolgt ist.

Jene Vorstellung wurde unmittelbar erschüttert durch die Experimente von Rumford und Davy, der 1812 wieder zu der Betrachtung der Wärme als einer Form der Bewegung zurückgeführt wurde. Dennoch halten die Untersuchungen über die thermischen Maschinen, die Sadi Carnot 1824 vornahm, noch immer das Bild der unzerstörbaren Wärmemenge fest. Erst einige Jahre später rektifizierte Carnot diese Ansicht und gelangte zur Anerkennung eines mechanischen Äquivalentes der Wärme. Aber seine Aufzeichnungen über diesen Gegenstand blieben während 40 Jahren noch nach seinem Tode, der 1832 eintrat, unveröffentlicht.

In dem Dezennium zwischen 1830 und 1840 näherten sich verschiedene Denker der Vorstellung, daß die Wärme Bewegung sei und entnahmen daraus die Ansicht von der Erhaltung dessen, was man heute *Energie* nennt. Wir erwähnen z. B. eine Arbeit von Mohr (1837), die von Tait wieder aufgefunden wurde.

Daraus ergibt sich, daß die mechanische Vorstellung der Wärme mehr oder weniger implizite als Leitgedanke bei der Forschung nach einer Äquivalenz zwischen Wärme und Arbeit anzusehen ist und deshalb als eine Vorbereitung zu betrachten ist auf die Entdeckung, die sich an die Namen Mayer (1842), Joule und Colding (1843) knüpft.

Ohne die respektiven Verdienste dieser drei Entdecker einer Diskussion zu unterwerfen, genügt es, zu

konstatieren, daß, welches auch ihre persönlichen Ansichten gewesen sein mögen, sie sich vor einer *bereits gestellten Frage* sahen. Gerade in der Fragestellung erkennt man den Einfluß der Theorie auf die experimentelle Forschung, d. h. den heuristischen Wert des Modells, das aus der Wärme eine Form der Bewegung macht.

Vergebens würde man gegen diese Behauptung die persönlichen Ansichten MAYERS anführen, der eine solche mechanische Vorstellung ablehnte; um so mehr als in der Untersuchung MAYERS sich schon von vornherein das Postulat der Erhaltung von etwas Gemeinsamem zwischen Arbeit und Wärme herausstellt und die numerische Bestimmung des thermodynamischen Äquivalents ohne Beweis dieses Faktums aus der Vergleichung der spezifischen Wärmen der Luft geführt wird.

Die Beziehung zwischen dem Prinzip der Äquivalenz und der mechanischen Wärmetheorie scheint von JOULE und COLDING klar aufgefaßt worden zu sein und erscheint in noch klarerem Lichte in den Arbeiten von HELMHOLTZ (1847). Wenn man jedes isolierte System als einen NEWTONschen Mechanismus betrachtet, so daß ein Potential oder eine potentielle Energie (deren lokale Variation die Kraft mißt) existiert, so kann man die *Gesamtenergie* des Systems betrachten, d. h. die Summe dieser potentiellen Energie und der kinetischen Energie oder lebendigen Kraft, die in verschiedene *Energien* zerfällt, welche ihre eigene physikalische Bedeutung haben: in eine in die Erscheinung tretende mechanische Energie (kinetische und potentielle), eine thermische Energie oder Wärmemenge und im allgemeinen in andere Energieformen (elektrische, Lichtenergie usw.). Die Summe der verschiedenen genannten Energien bleibt konstant.

Dies ist das allgemeine Prinzip der *Erhaltung der Energie*, das die thermodynamische Äquivalenz als Spezialfall umfaßt.

Wir wollen ausdrücklich hervorheben, daß das Prinzip der Erhaltung der Energie heute als ein *experimentelles Prinzip* anzusehen ist, das von der Hypothese der Zentralkräfte unabhängig ist.

Eine solche Behauptung widerspricht nicht dem erkannten Zusammenhange zwischen dieser Hypothese und dem Prinzip. Dieses ist eine Folge von jener, aber nicht umgekehrt. Wenn demnach mannigfache und untereinander übereinstimmende Experimente das Energieprinzip direkt bestätigen, so wird dadurch die Gültigkeit des Prinzips selbst auf eine neue Grundlage gestellt, während die anfängliche Hypothese, die zu seiner Entdeckung führte, nur eine unvollkommene und indirekte Bestätigung erhält.

Nun beruht das übereinstimmende Vertrauen auf das Energieprinzip auf zwei Arten von Beweisen:

1. den direkten Experimenten von Joule, Hirn usw., durch die das mechanische Wärmeäquivalent durch die verschiedensten Verwandlungen der Energie hindurch wiedergefunden wird.
2. dem indirekten Beweis von Helmholtz, der das Prinzip der Erhaltung der Energie aus der *Unmöglichkeit des Perpetuum mobile* bewiesen hat, wobei er diese Unmöglichkeit als bewiesen annahm durch eine kritische Prüfung der unfruchtbaren Versuche, die sich auf das genannte Problem beziehen.

§ 14. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik entspringt offenbar nicht aus mechanischen Vorstellungen der Wärme, sondern wird nahegelegt durch die Analogie des „Temperaturgefälles" mit der Bewegung einer Flüssigkeit. Wir werden auch sehen, welche Schwierigkeiten sich seiner Vereinigung mit dem Mechanismus entgegenstellen.

Seine Entdeckung knüpft sich an die Untersuchungen von SADI CARNOT über die thermischen Maschinen. Es war nur nötig, die aus diesen bei der Hypothese der Wärmeflüssigkeit erhaltenen Resultate zu berichtigen, indem man sie mit dem Prinzip der Äquivalenz von Wärme und Arbeit in Übereinstimmung brachte. Dies tat CLAUSIUS 1850.

Das Grundpostulat von CLAUSIUS ist, daß „die Wärme nicht ohne Anwendung von Arbeit und ohne daß gleichzeitig andere Wärme von einem dritten zu einem vierten Körper von niedrigerer Temperatur übergeht, von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen kann". Aus diesem Postulate kann man ein äquivalentes Prinzip ableiten, das die *Unmöglichkeit des sogenannten Perpetuum mobile der zweiten Art* ausdrückt, d. h. „es ist nicht möglich, Wärme dadurch in Arbeit zu verwandeln, daß man die Wärme aus einer einzigen Quelle von gleichmäßiger Temperatur entnimmt".

Wenn man dieses Prinzip mit dem der Äquivalenz kombiniert, so gelangt man zu dem CARNOT-CLAUSIUSschen *Satz*, den wir in seiner allgemeinsten Form auf die reversiblen Kreisprozesse bezogen aussprechen werden, indem wir einige Einschränkungen von sekundärer Bedeutung, die man bei seinem Beweise benutzt, beiseite lassen.

Es sei ein System von Körpern gegeben, das nach einem geschlossenen Kreisprozesse von reversibeln Umwandlungen zu seinem ursprünglichen Zustand zurückkehrt. Wenn man dann längs der Transformationslinie s die Wärmemenge Q und die (absolute) Temperatur T des Systems berechnet, so erhält man

$$\int_s \frac{dQ}{T} = 0.$$ [1]

1) Wenn die Temperatur nicht gleichförmig ist, so muß man das System in eine entsprechende Anzahl elementarer Teile einteilen und die Summe der CLAUSIUSschen Integrale betrachten. Vgl. „POINCARÉ „Thermodynamique". CARRÈ, Paris 1892, S. 224.

Wenn man folglich das CLAUSIUSsche Integral $s = \int \frac{dQ}{T}$ längs eines offenen Kreisprozesses von reversibeln Transformationen berechnet, so erhält man eine Größe, die nur von dem Zustande des Systems und nicht von der Reihe der ausgeführten Transformationen abhängt. Diese Größe erhält den Namen der *Entropie*.

Der CARNOT-CLAUSIUSsche Satz kann als zweiter Hauptsatz der Thermodynamik betrachtet werden, und es handelt sich nun darum zu untersuchen, auf welche Weise man eine mechanische Erklärung für ihn liefern kann.

Machen wir die Annahme, daß die Wärme der sinnliche Ausdruck für *innere* (unsichtbare) *Bewegungen* der Moleküle ist. In den thermodynamischen Transformationen eines Körpers werden wir dann ein mechanisches System erblicken, für das man zwei Komponenten der Gesamtenergie unterscheiden kann:

1. die *innere* Energie, die durch die *Wärmemenge* Q dargestellt wird;
2. die *äußere* kinetische Energie, die von der sichtbaren Bewegung des Systems herrührt.

Aber diese zweite Energie kann gegenüber der ersten vernachlässigt werden, wenn man sich darauf beschränkt, *langsame Transformationen* zu betrachten, wo die Geschwindigkeiten der sichtbaren Bewegung, verglichen mit den molekularen Geschwindigkeiten, sehr klein sind.

Um den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik mechanisch zu deuten, muß man also den dynamischen Ausdruck für eine Größe suchen, welche die Temperatur T darstellt und die für jede elementare Transformation ein integrierender Teiler der Variation dQ ist.

Wenn man außerdem gemäß dem Gesichtspunkt der kinetischen Gastheorie das thermische Gleichgewicht als ein *statistisches* ansieht, so muß die Grundeigenschaft

der Temperatur erfüllt sein, d. h. wenn man zwei in statistischem Gleichgewicht befindliche Systeme, deren Zustand demselben Werte von T entspricht, vereinigt, so muß man gleichfalls ein System im statistischen Gleichgewicht erhalten, dem derselbe Wert von T zukommt.

Die Darstellung der Gase, wie sie von der kinetischen Theorie (§ 10) gegeben wird, führt zu einer Definition der (absoluten) Temperatur T, bei der die ausgesprochenen Bedingungen erfüllt sind. Dies ist eine Folge der Tatsache, daß die kinetische Hypothese die *Gesetze der vollkommenen Gase* enthält.

Die mechanische Darstellung der tropfbarflüssigen und der festen Körper läßt sich weniger leicht mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in Einklang bringen.

Die wichtigsten Versuche, einen Mechanismus zu konstruieren, der geeignet ist, diese Körper vorzutäuschen, verdankt man Boltzmann (1866), Clausius (1871), H. Helmholtz[1]) (1884) und J. W. Gibbs[2]) (1902).

Diese Versuche und besonders jene bemerkenswertesten der beiden zuletzt angeführten Autoren lassen die gewünschte mechanische Erklärung als möglich erscheinen, wenn sie gleich keine vollkommen befriedigende Antwort auf das Problem liefern.

In den von Helmholtz konstruierten Mechanismen (*monozyklischen Systemen*, in denen verborgene stationäre Bewegungen, z. B. Wirbel- oder Schwingungsbewegungen stattfinden) gelingt es, T zu definieren als proportional der mittleren kinetischen Energie der Moleküle, so daß

---

1) „Wissenschaftliche Abhandlungen" Bd. III, S. 176. Vgl. H. Poincaré „Thermodynamique" S. 392.

2) „Elementary Principles in Statistical Mechanics" New Jork und London. Vgl. T. Duhem l. c.

es für jede elementare Transformation ein integrierender Teiler der Variation dQ wird; aber man sieht nicht recht, wie T die zweite oben angeführte Grundbedingung erfüllt.

Gibbs hat sich vor allen Dingen bemüht, dieser Bedingung zu genügen und hat dies unter sehr allgemeinen Voraussetzungen erreicht, indem er Systeme betrachtete, die aus einer ungeheuren Zahl von sehr verschiedenen Elementen (Körpern) bestehen. Unglücklicherweise entfernen sich diese Systeme von der Newtonschen Form des Mechanismus; denn es treten dabei Kräfte auf, die von festen Zentren ausgehen, anstatt der gegenseitigen Einwirkungen der in Bewegung befindlichen Teile.

Wenn in den Gibbsschen Systemen eine besondere Bedingung (die *kanonische Verteilung*) erfüllt ist, so kann man also eine gewisse Größe (den *Verteilungsmodul*) T definieren, der die erwähnte Grundeigenschaft besitzt. Damit die Vereinigung zweier im statistischen Gleichgewicht befindlicher Systeme mit kanonischer Verteilung wieder ein kanonisches System in statistischem Gleichgewicht ergibt, ist es notwendig und hinreichend, daß die beiden Systeme denselben Verteilungsmodul besitzen. Allerdings stimmen die Gleichungen des statistischen Gleichgewichts für die Gibbsschen Systeme nicht genau mit denen der Thermodynamik überein, vielmehr kommt darin eine Abweichung vor, die allerdings um so geringer wird, je mehr die Zahl der Parameter wächst, von denen die Bestimmung eines jeden Elementes des Systemes abhängt, so daß die *thermodynamischen Gesetze hier als Grenzfälle der mechanischen erscheinen.*

§ 15. Die irreversibeln Erscheinungen.

Es wäre gewagt, aus diesem Ergebnis irgendeinen Schluß ziehen zu wollen. Offenbar stellen die von Gibbs erdachten Systeme nicht die einzig mögliche mechanische

Illustration der thermodynamischen Gesetze dar. Es scheint demnach nicht ausgeschlossen, daß man auch, ohne die NEWTONsche Formel des Mechanismus zu verlassen, zur Konstruktion eines hinreichend allgemeinen mechanischen Modells gelangen kann, das den gewünschten Bedingungen genau entspricht.

Aber es gibt noch eine andere Seite des Problems, die unsere Aufmerksamkeit erfordert.

Bisher haben wir nur reversible thermodynamische Vorgänge betrachtet. Nun ist dies nur ein Grenzfall des allgemeinen Falles, in dem man irreversible Erscheinungen hat, für die der CARNOT-CLAUSIUSsche Satz dahin abgeändert werden muß, daß an die Stelle der oben betrachteten Gleichung eine Ungleichung tritt. Wenn man dann auch für diesen Fall die Veränderung der Entropie definiert[1]), so gelangt man zu dem folgenden Resultat:

Bei jeder irreversiblen Transformation eines isolierten Systems nimmt die Entropie beständig zu.

Es scheint demnach dieselbe Tendenz alle Naturerscheinungen in einem bestimmten Sinne zu beherrschen.

Wie stimmt dieses mit der mechanischen Darstellung überein?

Eine der unangenehmsten Konsequenzen der den LAGRANGEschen Gleichungen eigentümlichen Form ist die Umkehrbarkeit der Bewegungen. Demnach kann kein Mechanismus, sofern er gemäß den Prinzipien der Dynamik diesen Gleichungen gehorcht, ein Beispiel von irreversiblen Vorgängen bieten.

Es scheint auf den ersten Blick, als könne diese Schwierigkeit nicht beseitigt werden. Nichtsdestoweniger hat man zwei Erklärungen vorgeschlagen, um das Paradoxon zu beseitigen.

---

1) Vgl. POINCARÉ, Op. c. S. 229.

HELMHOLTZ bemerkt, daß die Reversibilität nur den *vollständigen* mechanischen Systemen zukommt; in *unvollständigen* Systemen ist eine scheinbare Irreversibilität möglich. Dies ist z. B. bei dem FOUCAULTschen Pendel der Fall, wegen der Bewegungen der Erde, die das System vervollständigen.

Wir können nun annehmen, daß die uns von der Erfahrung gegebenen irreversibeln Vorgänge nur der sichtbare Teil der vollständigen Erscheinungen sind, in denen *verborgene Bewegungen* eine Rolle spielen. Die Irreversibilität würde deshalb nur die Erscheinung von Tatsachen sein, die in ihrer Gesamtheit reversibel wären.

Man darf sich über die Tragweite dieser Erklärung keine Illusionen machen. DUHEM bemerkt richtig, daß sie zwar von der Existenz irreversibler Vorgänge Rechenschaft gibt, uns aber nicht sagt, weshalb diese sämtlich einer gemeinsamen Tendenz gehorchen; warum man neben den scheinbar isolierten Systemen, in denen die Entropie wächst, nicht auch solche findet, in denen das Gegenteil der Fall ist.

Etwas befriedigender ist die Erklärung der Irreversibilität, die von den Begründern der kinetischen Gastheorie vorgeschlagen wurde.

Betrachten wir ein System, das besteht aus einer ungeheuren Anzahl von Elementen, die sich auf jede mögliche Weise bewegen, z. B. jenes, das wir als Modell eines Gases bezeichnet haben. Eine Transformation des Systems entspricht dem Übergang von einem Zustand zu einem anderen, wobei jeder Zustand definiert ist durch die Geschwindigkeit der Elemente nach Größe und Richtung.

In Ermangelung einer genauen Kenntnis des Prozesses ist es unmöglich zu sagen, welche Veränderung das System nach einer Zeit erfahren haben wird. Aber in der Gesamtheit der möglichen Veränderungen erscheinen

diejenigen am *wahrscheinlichsten*, die sich einer Verteilung der Geschwindigkeiten nähern, welche von MAXWELL angegeben wurde und für die eine gewisse Funktion H (die somit die Rolle der Entropie spielt) ein Maximum wird, entsprechend einem Zustand vollkommener *Unordnung* des Systems.

Man kann also behaupten, daß nach einer hinreichend langen Zeit t das System eine Veränderung erlitten haben wird, die sehr wahrscheinlich im Sinne eines Anwachsens von H liegt; allerdings wäre eine solche Veränderung immer noch theoretisch umkehrbar; aber die entgegengesetzte Transformation kann nicht als ebenso wahrscheinlich wie die gegebene betrachtet werden, weil die Fortsetzung der letzteren für einen größeren Wert von t wahrscheinlich zu einem ungeordneten Zustand führen würde, für den H einen größeren Wert hätte.

Wir wollen uns bei den schwierigen Punkten dieser Überlegung aufhalten.

Obgleich die möglichen Transformationen unseres Systems sich paarweise darstellen, indem neben jeder die umgekehrte steht, folgt doch daraus nicht, daß jede von ihnen ebenso wahrscheinlich ist wie ihre Umkehrung. Diese Folgerung wäre nur berechtigt, wenn die Transformationen in endlicher Anzahl vorhanden wären, während ihre Anzahl doch unendlich ist. Die Umkehrbarkeit erscheint so als eine mittlere Wirkung in einer Reihe von Erscheinungen, die jede für sich umkehrbar sind. Von dieser Seite ist dagegen nichts einzuwenden.

Wir wollen jedoch den Charakter der so erhaltenen Erklärung enthüllen. Sie fügt zu der mechanischen Darstellung das experimentelle Prinzip hinzu, nach dem in einer großen Zahl von Fällen das Gesetz der Wahrscheinlichkeit erfüllt ist.

Dieses Prinzip setzt anderseits eine Gleichheit der Bedingungen voraus, unter denen die angegebenen ele-

mentaren Erscheinungen sich vollziehen, deren mittlere Wirkung man sucht. Wer versichert uns nun, daß eine ursprüngliche Verteilung unseres Mechanismus diese Gleichheit nicht zerstören und folglich das erwähnte Gesetz unanwendbar machen könnte? BOLTZMANN (op. c.) gibt in diesem Punkte zu, daß die Theorie auf einer Hypothese beruht. Wir glauben, daß eine genauere Bestimmung derselben wünschenswert ist.

Man kann jedenfalls nicht den Wert einer Erklärung leugnen, die sich als geeignet erweist für das Studium der konkreten Fälle, indem man mit ihrer Hilfe z. B. eine kinetische Theorie der Diffusion der Gase konstruiert und so einen irreversibeln Vorgang mechanisch darstellt.

Anderseits darf man sich nicht darüber beklagen, daß die mechanische Theorie der irreversibeln Transformationen unter besonderen Bedingungen eine Umkehrung des natürlichen Verlaufes der Erscheinungen im Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik als möglich erscheinen läßt. Wer versichert uns, daß das CLAUSIUSsche Postulat nicht irgendwelche Ausnahmen erleidet? z. B. bei den Lebenserscheinungen?

Unwillkürlich denkt man hier an die MAXWELLsche Vorstellung des Dämonen als Verteilers der Energie. Indem er in einem Gase die mit größerer Geschwindigkeit begabten Moleküle auswählt und von den übrigen trennt, könnte dieser Dämon die Temperatur von einem Teil desselben auf Kosten des anderen erhöhen, ohne irgendwelche Arbeit zu leisten.

Aber eine solche Erscheinung scheint notwendig eine *Kraft der Auswahl* zu erfordern.

G. LIPPMANN[1]), der die Benutzung eines solchen Mittels verschmähte, hat einen idealen Versuch vor-

1) Rapports du Congrès international de Physique. Paris 1900. Bd. I.

geschlagen, durch den man unter Voraussetzung der kinetischen Theorie einem Gase von gleichförmiger Temperatur Wärme entnehmen könnte, indem man es in ein Magnetfeld bringt und so das Postulat von CLAUSIUS widerlegen könnte. Es handelt sich darum, die alternierenden induzierten Ströme zu benutzen, die durch die Bewegung der von den Molekülen mitgeführten elektrischen Ladungen erzeugt werden, wobei man die kleinen Unterschiede in der Verteilung der Geschwindigkeiten berücksichtigt.

In Wirklichkeit würde diese Wirkung nicht merkbar gemacht werden können und folglich keinen eigentlichen Widerspruch gegen den thermodynamischen Hauptsatz darstellen, wenn man denselben in seiner realen Bedeutung als Erfahrungstatsache nimmt. Aber wenn wir uns nicht täuschen, kann man der Überlegung LIPPMANNS eine andere Bemerkung entgegenhalten; ein Gas von *gleichförmiger* Temperatur läßt nach der kinetischen Theorie immer sehr kleine Temperaturunterschiede an verschiedenen Punkten zu. Es scheint also, daß diese Unterschiede, die sich immer mehr ausgleichen, wie ein unendlich kleines Temperaturgefälle zur Hervorbringung von Wirkungen derselben Ordnung benutzt werden können, ohne daß der zweite Hauptsatz der Thermodynamik dadurch verletzt würde.

§ 16. Energetische Mechanik.

Wir wollen die vorstehenden Entwickelungen über die Elastizität und die Wärme als einen Versuch betrachten, die NEWTONsche Mechanik einer erweiterten Verifikation zu unterwerfen.

Die Möglichkeit der Verifikation bleibt abhängig von der Annahme *verborgener Bewegungen.* Wir werden sehen, wie diese Annahme in den elektromagnetischen

Theorien eine Erweiterung erfährt, in dem dort auch *verborgene Massen* postuliert werden.

Nun enthält diese hypothetische Konstruktion einer unsichtbaren Welt, verglichen mit den Erfahrungstatsachen, die sie als Folge der angenommenen Prinzipien erklären will, eine um so unbegrenztere Willkür, als uns die irreversibeln Vorgänge zwingen, die verborgenen Bewegungen zu vervielfältigen und nur ihre *mittleren Wirkungen* gemäß dem Gesetz der großen Zahlen zu berücksichtigen.

Unter diesem Gesichtspunkt betrachtet, erhält die Physik den Charakter einer *Schranke* für die Mechanik und deren Verifikation mangelt vollständig, da sich eine *Modifikation der mechanischen Prinzipien als möglich* erweist, die so beschaffen ist, daß sie bei der Mittelbildung nicht in Erscheinung tritt.

Der vorstehende Schluß kann ausgedrückt werden, indem man sagt, daß die mechanische Erklärung der physikalischen Erscheinungen *indifferente Hypothesen* enthält in bezug auf die Folgen, die die allgemeinen Prinzipien der Erscheinungen selbst bilden.

Durch das Bestreben, *das Indifferente zu eliminieren*, wird eine neuere induktive Entwickelung der Dynamik gerechtfertigt, bei der diese Prinzipien als allgemeinste Voraussetzungen an die Stelle der NEWTONschen treten. Dieser Entwickelung begegnen wir in der Konstruktion einer *energetischen Mechanik*, die ihre Entstehung HELMHOLTZ verdankt.

Denken wir sie uns ausgehend von einem NEWTONschen Mechanismus, d. h. von einem System bewegter Punkte, zwischen denen Zentralkräfte wirken; dann ist eine *potentielle* und eine *kinetische Energie* definiert, die nach den verschiedenen mechanischen Darstellungen eine unmittelbare physikalische Bedeutung erhalten, indem sie zu meßbaren Größen werden, und man kann die folgenden fundamentalen Postulate aufstellen:

1. Die Summe der beiden Energien ist in jedem isolierten System konstant *(Erhaltung der Energie)*.
2. Die Veränderung findet so statt, daß das Mittel aus den Unterschieden zwischen den beiden Energien in jedem Zeitintervall ein Minimum wird (HAMILTONsches *Prinzip*).

Die größere Allgemeinheit dieser Postulate im Vergleich mit der klassischen Mechanik ergibt sich aus den folgenden Bemerkungen:

a) Jede Art von Erscheinungen, für die man zwei Arten von Energie definieren kann, die als kinetische und potentielle zu unterscheiden sind, so daß die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind, gestattet *eine und folglich auch unendlich viele mechanische Erklärungen* (POINCARÉ).

b) Eine energetische Erklärung einer Art von Erscheinungen kann auch einem hypothetischen Mechanismus entsprechen, für den die dynamischen Grundsätze nicht gelten.

Immerhin muß man dabei eine mechanische Erklärung gemäß der klassischen Dynamik im Auge haben; und es ist zu bemerken, daß als energetische Erklärung *nur eine solche* gelten kann, für die die Kräfte ein Potential besitzen, d. h. für die das Prinzip der lebendigen Kraft gilt (Kap. V § 28).

Die Energetik ist also nur eine allgemeinere Mechanik, wenn man den Fall der Kräfte ohne Potential ausschließt, welcher Fall, wenn die Erscheinungen dem Gesetz der Erhaltung der Energie nicht gehorchen, als ein Kunstgriff bezeichnet werden kann, der dazu dient, eine engere Mechanik der unvollständigen Systeme abzugrenzen und in dieser das zu ersetzen, was von nicht eigentlich mechanischen Energieformen herrührt.

§ 17. Materie und Energie.

Die energetische Mechanik stößt, wie die klassische, auf die Schwierigkeit, die irreversibeln Erscheinungen nicht erklären zu können, und wenn sie die Mittelbetrachtungen und Grenzübergänge vermeiden will, so ist sie gezwungen, *qualitativ verschiedene Energieformen* anzunehmen, und folglich neue Postulate über ihre Transformation aufzustellen. In diesem Sinne gehen in utilitaristischer Absicht gewisse neuere Arbeiten auf dem Gebiete der physikalischen Chemie vor.[1])

Es ist nicht unsere Absicht, diese zu prüfen. Wir wollen vielmehr hier unter verschiedenen Gesichtspunkten die Grundbegriffe der energetischen und der klassischen Mechanik einander gegenüberstellen.

Wir haben schon hervorgehoben (Kap. V § 20), daß die Kritik der die Bewegung bestimmenden Umstände auf folgende Unterscheidung gerichtet ist; nämlich zu unterscheiden:

1. die *inneren* Eigenschaften des bewegten Körpers, auf die sich die Vorstellungen beziehen, die zu dem Begriff der *Masse* führen,
2. die *äußeren* Beziehungen, d. h. das *Kraftfeld*, in dem der Körper sich bewegt.

Die Ausdrücke „innen" und „außen" haben hier eine relative Bedeutung. Als innere Bestandteile werden diejenigen betrachtet, die durch Experimente *an dem Körper* selbst geliefert werden, wobei zwar *andere* Körper (Instrumente usw.) eine Rolle spielen, die Experimente aber von der Bewegung, deren Bestimmung geschehen soll, unabhängig sind, die also nach Belieben an dem Körper vorgenommen werden können, z. B. im Zustand der Ruhe. Als äußere Daten werden demgegenüber diejenigen Be-

---

1) Vgl. DUHEM a. a. O.

dingungen des bewegten Körpers betrachtet, deren Wirkung man konstatieren kann, indem man in das Feld einen beliebigen anderen Körper (von gleicher Masse) bringt. Durch Abstraktion betrachtet man diese bis zu einem gewissen Grade von dem Körper unabhängigen Daten als äußere.

Wir haben nun schon Gelegenheit gehabt, zu bemerken, daß diese schematische Unterscheidung nur unvollkommen der Wirklichkeit entspricht, wenn man die bekannten Tatsachen in ihrer weitesten Ausdehnung betrachtet. Einerseits nämlich führt uns die Vergleichung der Massen chemisch nicht aufeinander zurückführbarer Körper zu Bewegungsexperimenten, bei denen mindestens implizite die Kräfte eine Rolle spielen. Anderseits zeigen uns bereits die NEWTONschen Kraftfelder eine Abhängigkeit der als äußeres Datum aufgefaßten Kraft von der Masse, auf welche sie wirkt, und die elektrischen usw. Erscheinungen zeigen uns sogar eine Abhängigkeit derselben von dem physikalischen Zustand des Körpers, d. h. von Eigenschaften desselben, die wenigstens auf den ersten Blick sich als innere darstellen.

Die weitere Entwickelung ähnlicher Überlegungen führt natürlich zu der Auffassung, daß die Unterscheidung zwischen inneren und äußeren Eigenschaften oder Beziehungen eines Körpers, *in einem allgemeinen Sinne genommen*, eine fiktive ist. Diese Kritik ergibt denselben Begriff von *Materie*, wie er sich an die vorstehende Unterscheidung knüpft.

Wenn man demnach *einem Stoff* gewisse Eigenschaften zuschreibt, so hat man darunter zu verstehen die Erkenntnis der Verknüpfung gewisser Erscheinungsdaten, die man einem abstrakten Objekt, dem *materiellen Körper*, entsprechen läßt. Hauptsächlich deshalb, weil man dadurch eine gewisse *Lokalisation* und dadurch die Möglichkeit erhält, die Erscheinungen zu *verteilen*.

Von besonderer Wichtigkeit sind unter diesem Gesichtspunkt die *festen* Körper, die auch als Gefäße für die *tropfbarflüssigen* und für die *Gase* dienen.

Nun entspricht die Verteilbarkeit der Materie einer Reihe superponierter *Invarianten* in bezug auf die physikalisch-chemischen Umwandlungen. Die *Masse* ist einer dieser Invarianten in bezug auf die Gruppe aller erwähnten Umwandlungen. Gewisse *Kraftfelder*, die wir einem Körper beilegen, z. B. die NEWTONschen Anziehungskräfte, haben nur einen relativ invarianten Sinn. Diese Invarianz wird ausgedrückt, wenn man sagt, daß für einen *isolierten* Körper die Masse konstant ist usw., wobei die Isolierung eine fiktive Annahme ist, die eine Abstraktion in vereinfachter Form wiedergibt.

Neben diesen Invarianten und allgemeiner als sie stellt sich die *Energie* dar, d. h. die Summe der verschiedenen Energien eines *isolierten Systems*.

Die Bedeutung der Energie selbst kann durch die verschiedenen möglichen Umwandlungen definiert werden, indem man sie durch Äquivalenz auf eine bestimmte Form, z. B. eine *Arbeit*, zurückführt, die dann unmittelbar einer bestimmten Gruppe von Tastmuskelempfindungen entspricht und mittels geeigneter Instrumente noch genauer bewertet werden kann.

Nun geht die Schule, die in OSTWALD ihren theoretischen Vorkämpfer gefunden hat, von der Grundanschauung aus, daß die Energie als ein *Gegenstand* betrachtet werden kann, wie die Materie, ja, daß diese sogar als eine *besondere Form der Energie* betrachtet werden muß.

Diese Behauptung hat großes Aufsehen erregt. Man hat von der *Immaterialität der Materie* und von der *Materialisation der Energie* gesprochen, als ob unter diesen Worten eine *Tatsache* von großer Bedeutung sich verberge, und man hat an den *gesunden Menschen-*

verstand appelliert. Ein kluger Ausweg für den, der sich eine Kritik der wissenschaftlichen Ausdrücke ersparen will!

In Wirklichkeit bezeichnen die oben wiedergegebenen Ausdrücke keineswegs eine Tatsache und die energetische Anschauung will in keiner Weise *die Wirklichkeit verändern*, sondern nur *die Bilder*, die wir uns von ihr machen, oder besser die Bilder, die bei dem abstrakten Studium der physikalischen Beziehungen auftreten, da doch die Anschauungen der Materie aus der konkreten Deutung der Theorie keineswegs verbannt wird.

Die Kritik des Massenbegriffs, die der energetischen Anschauung zugrunde liegt, und die Auffassung der Energie als „Gegenstand" können zu keinem berechtigten Einwand Anlaß geben. Man kann nur über den Wert dieser Bilder im Vergleich mit denjenigen diskutieren, die durch den Massenbegriff nahegelegt werden und speziell den *atomistischen* Bildern.

Nach Ansicht der Energetiker sind in dem Begriff der Energie alle partiellen Invarianten aufgegangen, die mit der Materie verknüpft waren, und besonders die Invarianz der Masse. Sie verwerfen anderseits jede atomistische Vorstellung.

Diese Ansichten erscheinen uns nicht hinreichend gerechtfertigt, und es ist bekannt, daß, während die atomistische Theorie in der Chemie einen wichtigen Platz einnimmt, ähnliche Vorstellungen mit Erfolg in den neueren Untersuchungen über den Elektromagnetismus Verwendung finden.

§ 18. Die Lokalisation und Bewegung der Energie.

Es gibt im übrigen zwei Arten, die Erscheinungen energetisch darzustellen.

Der erste, der partiellen Nützlichkeitszielen entspricht (vor allem in der neueren physikalischen

Chemie), sieht von allen Gesichtselementen ab, die mit *lokalen Beziehungen* zusammenhängen, und versucht, den Typus des Newtonschen mechanischen Modells zu einem höheren Grade von Abstraktion zu führen.

Aber demgegenüber beginnt eine andere Entwickelung im Cartesischen Sinne, die ihren Ausdruck in den Theorien über *die Lokalisation und Bewegung der Energie* findet.

Hier wird die Energie sozusagen materialisiert, und man vergleicht sie mit einem in den verschiedenen Gegenden des Raums verschieden dichten Fluidum und die Erklärung der Erscheinungen ist zurückgeführt auf die Beschreibung der Bewegung dieses Fluidums.

Diese Bilder gehen von der Theorie der Elektrizität aus (vgl. § 21). Maxwell hat als erster die elektrische Energie in dem Dielektrikum lokalisiert und Poynting hat die Einfachheit hervorgehoben, mit der sie sich bewegt. Abgesehen von einer das Volumen nicht verändernden Deformation ist ihre Strömung normal zu der Ebene der elektrischen und magnetischen Kräfte und dem Inhalt des von ihnen gebildeten Parallelogramms proportional.

Neuerdings hat Volterra einen Weg vorgeschlagen, um die Newtonsche und die elastische Energie zu lokalisieren und hat ihre Bewegung beschrieben: ein richtiges optisches Modell der *Wanderungen der Energie.*

Man kann heute noch nicht den positiven Wert dieser schönen spekulativen Resultate abschätzen.

Sie liefern uns aber eine mehr synthetische Anschauung von den Unterschieden zwischen inneren und äußeren Eigenschaften der Materie, und in bezug auf unsere Betrachtung haben sie folgendes Interesse: sie zeigen, daß der Dualismus zwischen der Cartesischen und der Newtonschen Anschauung, den wir in dem sinnlichen Gehalt der Bilder nachwiesen, sich auch noch bis in die Entwickelung der energetischen Begriffe hinein fortsetzt.

§ 19. Die elastische Erklärung der optischen und elektro-magnetischen Erscheinungen.

Neben der Entwickelung der Mechanik in den allgemeinen Theorien der Elastizität und der Wärme sind diejenigen zu erwähnen, welche das Licht, die Elektrizität und den Magnetismus betreffen. Über diese wollen wir kurz sprechen.

Diese Art von physikalischen Erscheinungen hängt auf zwei Weisen mit dem allgemeinen Begriff der Elastizität zusammen:

1. durch die Darstellung des Lichts als Schwingung eines elastischen Mediums (die Fresnelsche *Undulationstheorie*).
2. durch die Maxwellsche Vorstellung, die aus dem Dielektrikum zwischen elektrisierten Körpern ein elastisches Medium macht, dessen Deformationen direkt gewisse Druck- oder Spannungskräfte erzeugen, welche von uns als elektrostatische Wirkungen wahrgenommen werden.

Die Vereinigung dieser beiden Anschauungen hat Maxwell zur Begründung jener allgemeinen *elektromagnetischen Theorie* geführt, der die Optik untergeordnet wird.

§ 20. Die Optik.

Ohne in eine bis ins einzelne gehende historische Untersuchung einzutreten, können wir leicht die Entstehung der Ideen darstellen, die zu einer mechanischen Theorie des Lichtes geführt haben. Es genügt, sich folgendes gegenwärtig zu halten:

1. die Analogie zwischen gewissen optischen und akustischen Erscheinungen und zwischen diesen und einigen elementaren mechanischen Vorgängen

(die geradlinige Ausbreitung, das Gesetz der Reflexion usw.);

2. die Möglichkeit, für den Schall eine konkrete mechanische Erklärung zu geben, indem man die direkt konstatierbaren Schwingungen der schallaussendenden Körper benutzt;
3. die grundlegende Tatsache, daß das Licht eine endliche, wenn auch sehr große Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt.

Trotz der erwähnten Analogien hat NEWTON, auf den die mechanische Theorie des Schalles (die später nur in einem Punkte von LAPLACE verbessert wurde) zurückgeht, die erste optische Theorie auf eine wesentlich andere Hypothese gegründet, nämlich auf die *Emission* einer Substanz durch die leuchtenden Körper; und es ist nicht schwer, sich den Grund zu erklären, weshalb er den anderen Weg wählte.

Da es nicht möglich ist, die Lichterscheinungen durch Bewegung der unter unsere Sinne fallenden Materie zu erklären, so erfüllt die Emissionshypothese den leeren Raum mit einem Dinge, das gewissermaßen den geringsten Grad von Abstraktion erfordert und das anderseits auf spontanen Assoziationen beruht, deren Spuren sich in dem gewöhnlichen Sprachgebrauch finden. Es kommt hinzu, daß der Gedanke, das Licht mit dem Schall durch eine Undulationstheorie in engere Verbindung zu bringen, einigen ernsten Schwierigkeiten begegnen mußte, wie dies bei ihrer Entstehung auch tatsächlich der Fall war.

Wie dem auch sei, die Emissionstheorie erreichte durch die Arbeit der Nachfolger NEWTONS einen hohen Grad von Vollkommenheit und ermöglichte es LAPLACE, vermittels einer Anzahl von Hilfshypothesen die ersten Eigenschaften der Reflexion und der Brechung zu erklären.

Aber die Fortschritte in der experimentellen Untersuchung dieser letzteren Erscheinung und besonders die Messung der Lichtgeschwindigkeit in den Medien von verschiedenen Brechungsvermögen erwiesen sich als unvereinbar mit der Gesamtheit der angenommenen Hypothesen.

Demnach befestigte sich gegenüber der NEWTONschen Hypothese ihre Nebenbuhlerin, die von HUYGHENS erdacht und von YOUNG und FRESNEL weiter entwickelt wurde; dieselbe ließ eine Analogie zwischen dem Schall und dem Licht hervortreten, indem sie die Lichterscheinung als Schwingung eines elastischen Mediums des den ganzen Raum erfüllenden *Äthers* darstellte.

Und diese Theorie erwies immer mehr ihre Fruchtbarkeit, indem es z. B. FRESNEL selbst gelang, die Erscheinungen der Beugung, die von POISSON vorausgesagt worden waren, zu erklären.

Nun bestand das Grundproblem, das FRESNEL zu lösen hatte, in der Herstellung eines adäquaten Begriffs, von der dem Äther hypothetisch zugeschriebenen Elastizität.

Vor allem erwies sich die einfachste Hypothese, die darin bestand, den Äther als ein äußerst verdünntes gasförmiges Medium vorzustellen, als mit den Tatsachen unvereinbar. Die Erscheinungen der Polarisation und der Interferenz zusammen mit den Ergebnissen der Intensitätsmessungen bei den Untersuchungen der Reflexion und der Brechung führen notwendig zu der Annahme, daß die *Schwingungen des Lichtes transversal sind.*

Demnach stellt sich der Äther dar als mit einer Elastizität begabt, die derjenigen der Gase in gewissem Sinne entgegengesetzt ist, indem diese nur longitudinale und nicht transversale Wellen fortpflanzen, da das Gleiten der Moleküle keinem elastischen Widerstande begegnet.

Wie haben wir uns ein derartiges Medium vorzustellen?

Wenn wir uns nicht von den gewöhnlichen Bedingungen eines mechanischen Modells entfernen wollen, so müssen wir es entweder als einem festen Körper ähnlich vorstellen, indem wir ihm *Inkompressibilität* zuschreiben oder wir müssen ihm im Gegenteil eine *unendliche Zusammendrückbarkeit* verleihen.

Diese zweite Annahme wird im allgemeinen von Fresnel gemacht, während F. Neumann und MacCullagh eine andere Theorie entwickelt haben, in der systematisch die erste Hypothese verwandt wird.

Die beiden Ansichten führen dazu vorauszusetzen, daß bei dem polarisierten Licht die Schwingung eines Ätherteilchens der Polarisationsebene parallel bzw. senkrecht zu ihr ist. Aber es erscheint schwierig, durch das Experiment zwischen diesen beiden Fällen zu unterscheiden. Auch zeigt die Anyalse Poincarés, daß die Unterscheidung zwischen ihnen eine wenigstens im Gebiete der Optik ruhender Körper indifferente Hypothese darstellt. Immerhin wird ein kürzlich gemachtes photographisches Experiment Wieners von diesem als eine Bestätigung der Fresnelschen Ansicht gedeutet.

Was die Leichtigkeit der Vorstellung betrifft, so enthält sie offenbar viel Subjektives. Der Fresnelsche Äther ist ein vollkommen neues elastisches Medium, das man sich nur vorstellen kann, wenn man an ein Gas denkt, in dem die Rolle der Elastizität durch die der Zähigkeit ersetzt ist. Die Annahme des festen Äthers bietet größere Schwierigkeiten in bezug auf die Vorstellung der Beziehungen zwischen dem Äther selbst und der Materie und erfordert die Annahme einer besonderen Kraft (die Kirchhoffsche genannt), um die Verschiedenheit der Elastizität des Äthers auf den beiden

Seiten einer Fläche zu erklären, die Medien von verschiedenem Brechungsvermögen trennt.

Wir werden Gelegenheit haben, später zu sehen, daß die Elastizität des Äthers unter einem neuen Gesichtspunkt durch stationäre Bewegungen erklärt wird (§ 24). Aber auch in bezug auf die neue Auffassung stellt sich in der Theorie des Lichtes die Reziprozität der Erklärungen dar, auf die wir hingewiesen haben.

§ 21. Die Elektrostatik.

Die Versuche einer mechanischen Erklärung der elektrischen und elektromagnetischen Erscheinungen knüpfen an zwei fundamentale Gesichtspunkte CLERK MAXWELLS an, die beide vorauszusetzen und in einer synthetischen Theorie zu verbinden sind, die aber dennoch schwer in Übereinstimmung zu bringen sind, eine Schwierigkeit, die der Autor selbst nicht vollständig überwunden hat, obgleich er die Tatsachen mit einer scharfen Logik und bewundernswerten Anschauung der Analogien untersuchte und kritisierte. MAXWELL hat es vorgezogen, in den einzelnen Gebieten der Erfahrung verschiedene Konstruktionen beizubehalten in dem Vertrauen, daß scheinbare Widersprüche bei einer erweiterten Betrachtung der physikalischen Beziehungen verschwinden müssen, anstatt willkürlich durch den Geist der systematischen Komposition beseitigt zu werden.

Eine erste Art von Analogie, die in dem MAXWELLschen Werke eine Lehre für sich bildet, ist die *elastische Theorie der elektrostatischen Wirkungen.*

In derselben Weise, wie die Optik die Vorstellung eines elastischen Mediums nahelegt, durch das sich die Lichtwellen fortpflanzen, führte die Anziehung und Abstoßung in der Entfernung zwischen elektrisierten Körpern MAXWELL zu der Annahme eines besonderen elastischen Mediums, das zwischen den Leitern sich befindet. Die

Druck- und Spannungskräfte des Mediums drücken sich in den elektrischen Wirkungen aus, und diese Vorstellung findet ihre Begründung in den Versuchen FARADAYS, aus denen die wichtige Rolle der Dielektrika in den elektrischen Erscheinungen hervorgeht.

Wie man sieht, strebt der MAXWELLsche Versuch nach einer Zurückführung der zwischen entfernten Körpern wirkenden Kräfte auf solche, die in der Berührung wirken. Immerhin fordert das System von Bildern, in das sich dieser leitende Gedanke umsetzt, schwerwiegende Einwände heraus.

BELTRAMI hat bemerkt, daß die Spannungen, die in dem MAXWELLschen Medium bestehen, nicht den Differentialbedingungen genügen, die im allgemeinen für *elastische Medien* gelten, wenn man als charakteristische Eigenschaften derselben voraussetzt, daß der in ihnen durch eine unendlich kleine Deformation erzeugte Spannungszustand für jedes Element von dieser Deformation abhängt und nicht von der Folge von Zuständen, durch die der Körper vorher hindurch gegangen ist.

Diese Einwände berühren nicht die Möglichkeit einer elastischen Erklärung der elektrostatischen Wirkungen, aber sie zeigen, daß diese nicht in der einfachen von MAXWELL vorgeschlagenen Form gegeben werden kann, in der die Spannungen von dem lokalen Zustand der Kräfte des Feldes abhängen. Man kann jedoch in anderer Weise einem elektrostatischen Kraftfelde, wie im allgemeinen jedem Kraftfelde, eine wohldefinierte Deformation eines elastischen Mediums zuordnen, das sich unter der Wirkung dieser Kräfte im Gleichgewicht befindet. In diesem Sinne hat SOMIGLIANA das Problem gelöst, die Deformation und den entsprechenden Spannungszustand zu bestimmen, der einem elastischen Medium zukommen muß, wenn es die elektrostatischen Wirkungen erklären soll.

Aber hier hängen die Spannungen von dem ganzen gegebenen Kraftfelde ab.

§ 22. Der Elektromagnetismus.

Auch bei der Behandlung der elektromagnetischen Erscheinungen wird MAXWELL von dem Gedanken geleitet, die in der Entfernung wirkenden Kräfte auf Berührungswirkungen zurückzuführen. Wir wollen, ohne uns allzu enge Fesseln aufzuerlegen, versuchen, den Gedanken zu erläutern, der diese Theorie beherrscht.

Wir gehen aus von der Analogie mit der mechanischen Wärmetheorie.

Wie man hier durch die Beziehung zwischen Wärme und Arbeit zu der Hypothese geführt wurde, daß die Wärme einer inneren Bewegung der Teile des Körpers entspricht, ebenso legen die Tatsachen der elektromagnetischen Induktion, mit der sich die Erzeugung mechanischer Arbeit verbindet, den Gedanken nahe, daß die elektromagnetische Energie als eine Form der Bewegung anzusehen ist.

MAXWELL legt besonderen Nachdruck auf die Analogie zwischen den Erscheinungen der Selbstinduktion der Ströme und den Trägheitskräften, um daraus den Gesichtspunkt zu entnehmen, daß dem Strome etwas entspricht, was sich bewegt. Da aber diese Erscheinungen von der Form des Stromkreises und von dem umgebenden Medium abhängen, so verwirft er die Hypothese, daß das, was sich bewegt, die Elektrizität in dem Leitungsdraht sei. Dagegen legt ihm eine Anschauung, die dem *synthetischen* Geiste FARADAYS gemäß ist, den Gedanken nahe, daß es sich um die Bewegung eines Fluidums handelt, welches das umgebende Dielektrikum erfüllt. Es handelt sich nun darum, durch eine solche Hypothese die verschiedenen Erscheinungen der elektromagnetischen Induktion zu erklären. Dieses

ist der Zweck der Theorie, welche MAXWELL in dem vierten Teile seines Buches über die Elektrizität und den Magnetismus entwickelt.

Und die Erklärung wird im Sinne der energetischen Mechanik (§ 16) erhalten, deren Gesichtspunkte hier zum erstenmal eine wichtige konkrete Anwendung erfuhren.

Wir wollen die leitenden Grundsätze der MAXWELLschen Theorie auseinandersetzen, indem wir uns der Einfachheit halber auf die Elektrodynamik der *ruhenden Körper* in einem *homogenen Medium* beziehen. Trotz der Unmöglichkeit, den verborgenen Mechanismus zu bestimmen, der den sichtbaren Tatsachen entspricht, kann man mit Hilfe des HAMILTONschen Prinzipes die Beziehungen bestimmen, die zwischen zwei gegebenen Energieformen im Gebiete der Erfahrung bestehen, nämlich zwischen der *elektrischen Energie*, die (unabhängig von den besonderen Hypothesen des vorangehenden Paragraphen) als *potentielle Energie* angesehen werden kann, und der *elektromagnetischen Energie*, die als *kinetische Energie* oder lebendige Kraft zu betrachten ist. Die elektrostatische Theorie ergibt den Ausdruck der ersten Energie als Funktion der elektrischen Ladungen der Entfernungen usw. Die Art, wie die zweite Energie von der Stärke der elektrischen Ströme und von den geometrischen Verhältnissen der Stromkreise abhängt, wird von MAXWELL kritisch untersucht.

Nun *stellen die vorstehenden Beziehungen die Tatsache der elektromagnetischen Induktion gut dar.*

Von ihnen geht man leicht zu den *Gleichungen eines elektromagnetischen Feldes* über, die ausdrücken, daß der zukünftige Zustand des Feldes durch den gegenwärtigen bestimmt ist und in denen gewisse Elemente verbunden auftreten, die in den Integralkombinationen vorkommen, welche die beiden erwähnten Energien darstellen.

Der positive Gehalt der genannten Gleichungen wird weiterhin im Anschluß an HERTZ und LEVI-CIVITÀ aufgeklärt werden.

Aus den MAXWELLschen Entwickelungen ergibt sich keine adäquate Vorstellung des verborgenen Mechanismus der elektromagnetischen Erscheinungen, sondern nur das Schema eines Mediums, das man in grober Annäherung sich als ein *zellenförmiges System* vorstellen kann, *welches eine Flüssigkeit enthält.*

Die Bewegung der Flüssigkeit entspricht der elektromagnetischen Energie und die elastischen Reaktionen, d. h. die Druck- und Spannkräfte, die durch diese Bewegung in den Zellwänden erzeugt werden, ergeben die elektrostatische Energie.

Wir haben schon hervorgehoben, daß die Bedeutung dieses Schemas in der Verbindung besteht, die zwischen den verschiedenen elektromagnetischen Erscheinungen und besonders denen der Induktion hergestellt wird.

Es wird dadurch möglich, die Vorstellung dieser Erscheinungen über das Gebiet der Erfahrung hinaus zu erweitern und so wurde MAXWELL zu seiner wichtigsten Entdeckung geführt.

Er hat bemerkt, daß sehr schnelle periodische elektromagnetische Oszillationen Erscheinungen erzeugen mußten, die denen des Lichtes ähnlich sind. Die Lichtwellen werden demnach als ein besonderer Fall solcher Schwingungen angesehen werden können, welcher einer sehr kleinen Wellenlänge entspricht.

Diese theoretischen Gesichtspunkte empfingen durch das MAXWELLsche Werk eine begrenzte Bestätigung: die am meisten in die Augen springende ist das Zusammentreffen, durch das die Lichtgeschwindigkeit merklich gleich dem Verhältnis zwischen den beiden Einheiten der Elektrizitätsmenge in dem elektrostatischen und dem elektromagnetischen Maßsystem ist. Die Vergleichung

zwischen den optischen und elektrischen Eigenschaften der Körper ergibt weniger befriedigende Resultate, wenn man etwas genauere quantitative Übereinstimmung fordert.

Zwanzig Jahre später wurden die elektrischen Schwingungen durch HERTZ experimentell verwirklicht und ihre Geschwindigkeit gemessen, die sich gemäß der theoretischen Voraussage gleich der des Lichtes ergab!

Seit jenem Tage haben sich neue Analogien zwischen den optischen und den elektromagnetischen Erscheinungen in großer Zahl ergeben; z. B. hat man mit den elektromagnetischen Wellen die verschiedenen Versuche über die Spiegelung, Brechung usw. wiederholt, wofür im besonderen die Arbeiten AUGUSTO RIGHIS[1]) in Betracht kommen. So kann man sagen, daß der allgemeine Begriff der elektromagnetischen Theorie des Lichtes nachgerade einen gesicherten Besitz der Wissenschaft darstellt.

§ 23. Der positive Gehalt der MAXWELLschen Theorie.

In dem MAXWELLschen Werke erkennt man die Übereinanderlagerung verschiedener partieller Konstruktionen, die einerseits auf eine mechanische Darstellung der optisch-elektromagnetischen Erscheinungen und anderseits auf eine Zusammenfassung der verschiedenen Erscheinungsdaten gerichtet sind, die durch die Gleichungen eines elektromagnetischen Kraftfeldes ausgedrückt wird.

Nun kommen in diesen Gleichungen verschiedenartige Größen vor, nämlich solche, die sich auf das mechanische Modell beziehen neben anderen, die durch

1) Vgl. „L'Ottica delle oscillazioni elettriche", Bologna, ZANICHELLI 1897.

mögliche Experimente definiert sind. Daher ist es notwendig, eine Kritik anzuwenden, um den positiven Gehalt der MAXWELLschen Theorie zu erkennen.

Eine solche Kritik hat HEAVISIDE und HERTZ dazu geführt, die MAXWELLschen Gleichungen umzuformen und zu vereinfachen.

Vor allem kommt HERTZ neben der Ausdehnung der Gleichungen auf anisotrope kristallinische Medien das Verdienst zu, die Bedeutung dieser Gleichungen in zwei klassischen Abhandlungen in klarer Weise dargestellt zu haben. Diese Abhandlungen beziehen sich bzw. auf die Elektrodynamik *ruhender* und die *bewegter Körper.*[1])

Wir wollen hier den ersten Fall behandeln.

In einem homogenen Medium oder im leeren Raume seien mehrere unbewegliche Körper gegeben als Sitz elektrischer und elektromagnetischer Erscheinungen. Dadurch ist ein *elektromagnetisches Kraftfeld* definiert, d. h. es sind für jeden Punkt zwei Vektoren als Funktionen der Zeit definiert: die *elektrische* und die *magnetische Kraft.* Die elektrische Kraft ist diejenige Kraft, die in jedem Punkte des Feldes auf die elektrische Einheit, wenn man sie dorthin bringt, wirken würde. Sie ist also definiert unabhängig von der Unterscheidung der Kräfte *elektrostatischen* und *elektromagnetischen Ursprunges*, deren Resultante sie darstellt. Die magnetische Kraft wird in ganz ähnlicher Weise definiert.

Diese Definitionen haben eine positive Bedeutung in bezug auf mögliche Experimente, abgesehen von der praktischen Schwierigkeit, die elektrische Kraft in elektrostatischen Einheiten zu messen.

Die Kenntnis des elektrischen und magnetischen Kraftfeldes bestimmt dann vollständig den Ablauf der Er-

1) „Wiedemanns Annalen" Bd. 40, 41 (1890) und „Nuovo Cimento" Bd. 28.

scheinungen und besonders den der elektrodynamischen, unabhängig von der Kenntnis der elektrisierten Körper, der Ströme und der Magnete, die zur Definition des Feldes dienten. Dies findet statt auf Grund einer *fundamentalen Hypothese*, die im allgemeinen als eine Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes betrachtet wird, das für die beständigen Erscheinungen sich bestätigt: Der elektrische Strom in einem Leiter ist für jeden Punkt der dort wirkenden elektrischen Kraft vektoriell proportional.

Das elektrische und das magnetische Kraftfeld stehen in einer engen Abhängigkeit voneinander. Hertz nimmt ohne weiteres an, daß die Gleichungen, die eine solche Abhängigkeit ausdrücken, und die sich auf ein homogenes und isotropes umgebendes Medium beziehen, sich folgendermaßen ausdrücken lassen:

1. Die Variation der magnetischen Kraft in bezug auf die Zeit ist dem *curl*[1]) der elektrischen Kraft proportional.
2. Die Variation der elektrischen Kraft ist dem *curl* der magnetischen Kraft umgekehrt proportional.

Wenn das Feld ein Leiter ist, so wird dieses zweite Gesetz in dem Sinne abgeändert, daß zu der Veränderung der Kraft diejenige hinzukommt, die von dem Strome herrührt und die (wie wir bemerkten) der Kraft selbst proportional ist.

Die genannten Gleichungen, zu denen Heaviside gleichfalls gelangt war, indem er die Maxwellschen Gleichungen umformte und vereinfachte, bestimmen die Kenntnis des zukünftigen elektromagnetischen Feldes, wenn sein gegenwärtiger Zustand gegeben ist. Sie sagen uns nämlich, wie jede elektromagnetische Störung sich im Raume und in der Zeit ausbreitet.

1) Der curl bezeichnet eine geometrische Operation an den Vektoren, die von der *lokalen* Variation des Vektors im Felde abhängt.

Zu den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes muß man nun noch die Bedingungsgleichungen hinzufügen, welche die *Erhaltung der Elektrizität* und des *Magnetismus* ausdrücken und von denen die erste zur Unterscheidung des (leeren) Äthers von der Materie dient.

Man kann diese Gleichungen interpretieren und aus ihnen, wie HERTZ zeigt, die bekannten physikalischen Gesetze ableiten. In erster Linie diejenigen, die sich auf einen dauernden Zustand beziehen, z. B. das OHMsche Gesetz für die geschlossenen Stromkreise, die KIRCHHOFFschen Prinzipien für verzweigte Leiter, die AMPÈREsche Regel und das BIOT-SAVARTsche Gesetz, ferner die Gesetze der Induktion, die wir durch das Experiment an geschlossenen Stromkreisen kennen lernen, usw.

Die Verifikation der aus den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes gezogenen Folgerungen rechtfertigt nach HERTZ diese Gleichungen selbst, die als Grundhypothesen der Theorie angenommen worden waren.

Damit aber diese Verifikation der Hypothesen wirkliche Beweiskraft erlange, muß man feststellen, daß diese ihrerseits aus einigen der der Erfahrung entnommenen physikalischen Gesetzen abgeleitet werden können.

Dies hat T. LEVI-CIVITÀ[1]) ausgeführt. Er nahm die HELMHOLTZsche Theorie wieder auf und verbesserte sie durch die Annahme einer endlichen Ausbreitungszeit der Fernwirkungen. Er hat gezeigt, daß sie dann zu den HERTZschen Gleichungen führt.

Wir wollen dieses wichtige Ergebnis genauer erläutern.

Angenommen, daß

1. das Prinzip der *Erhaltung der Elektrizität* gelte und man infolgedessen die Veränderung eines elektromagnetischen Feldes als die Bewegung einer

1) Vgl. das „Nuovo Cimento", 1897.

Flüssigkeit darstellen kann, die da, wo sich die Materie befindet, eine Verdichtung erfährt, daß

2. gelten die Gesetze über die elektrostatische Wirkung von COULOMB, über die elektromagnetische Wirkung von BIOT und SAVART und über die elektrodynamische Induktion von F. NEUMANN[1]), verbessert durch die Annahme einer *Ausbreitungsgeschwindigkeit*, die derjenigen des Lichtes proportional ist.

Dann kann man in jedem Punkte des Feldes die elektrische Kraft berechnen, die sich aus den beiden Komponenten von elektrostatischem und elektrodynamischem Ursprunge zusammensetzt, und die magnetische Kraft, die durch das BIOT-SAVARTsche Gesetz gegeben wird. Diese beiden Kräfte werden in jedem homogenen isotropen ruhenden Medium durch die HERTZschen Gleichungen verknüpft.

Wir können also folgendermaßen zusammenfassen: *Die Arbeiten von* HERTZ *und* LEVI-CIVITÀ *lassen den positiven Gehalt der* MAXWELLschen *elektromagnetischen Theorie erkennen: für homogene und isotrope ruhende Medien ist diese Theorie äquivalent dem Prinzip der Erhaltung der Elektrizität zusammen mit dem* COULOMBschen, *dem* BIOT-SAVARTschen *und dem* F. NEUMANNschen *Gesetz, wenn diese durch die Annahme einer endlichen Ausbreitungszeit der Fernwirkungen verbessert werden.*

§ 24. Die Elastizität als Bewegung betrachtet.

Während die positive Kritik der MAXWELLschen Theorie aus den Feldgleichungen jeden Unterschied

1) LEVI-CIVITÀ hebt ausdrücklich hervor, daß es wesentlich ist, das Neumannsche Potentialgesetz auszuwählen aus den verschiedenen elementaren Induktionsgesetzen für offene Stromkreise, die mit den Experimenten an geschlossenen Kreisen vereinbar sind, und leitet daraus ein Argument ab zur Unterstützung dieses Gesetzes im Vergleich mit anderen, die man vorgeschlagen hat.

zwischen den elektrischen Kräften elektrostatischen und elektromagnetischen Ursprunges beseitigt, streben auch die Spekulationen über das mechanische Modell dieser Erscheinungen von der anderen Seite her zur Beseitigung dieses Unterschiedes.

Maxwell hatte die elektrostatischen Kräfte als *wahre elastische Kräfte angesehen*, und die elektromagnetischen Kräfte als *scheinbare* oder *Trägheitskräfte*, die von *verborgenen Bewegungen* herrühren. Eine Entwickelung der mechanischen Darstellung im Cartesischen Sinne führt dazu, auch die elektrostatischen Wirkungen als von verborgenen Bewegungen herrührend anzusehen und allgemeiner die *Elastizität als eine Form der Bewegung* zu erklären.

Dieser Gedanke tritt zuerst bei Mac Cullagh auf (1839), der bei der Erklärung der optischen Eigenschaften der Kristalle dazu geführt wurde, den Lichtäther nicht mehr als ein elastisches Medium im eigentlichen Sinne zu betrachten, sondern als ein Medium, in dem gewisse stationäre Bewegungen stattfinden, die eine *Rotationselastizität* vortäuschen. Fitzgerald machte die Bemerkung, daß dieses Modell sehr gut dazu geeignet ist, die Darstellung der optischen Erscheinungen mit derjenigen der elektromagnetischen in Einklang zu bringen. Aber die Schwierigkeiten der Vorstellung wurden von W. Thomson durch das konkrete Modell eines *gyrostatischen Äthers* behoben.

Die Grundlage der Konstruktion bildet die Eigenschaft der Permanenz der Rotationsachsen, die man beim Kreisel beobachtet. Mit vier gekoppelten Kreiseln kann man ein System zusammenstellen, das die Elastizität einer Feder vortäuscht; wenn man dem ganzen System eine Rotationsgeschwindigkeit erteilt, so bietet die Achse einer Verschiebung aus ihrer Richtung einen Widerstand dar. Wenn man demnach unendlich viele derartige

elementare Systeme zusammensetzt, so erhält man das Modell eines Äthers, der imstande ist, die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in einem magnetischen Kraftfelde (eine von FARADAY beobachtete Erscheinung) darzustellen.

Eine weitere Entwickelung seines Konstruktionsgedankens führte THOMSON dazu, ein *hydrokinetisches Modell* der elektrodynamischen Wirkungen zu erdenken, in dem die Undurchdringlichkeit und die Trägheit der Materie beim Stattfinden stationärer Bewegungen scheinbare Kräfte erzeugen, die denjenigen der AMPÈREschen Wirkungen der Ströme ähnlich sind.

Neben diesem Modell ist dasjenige zu erwähnen, das von C. A. BIERKNES für die elektrostatischen (oder die NEWTONschen) Wirkungen vorgeschlagen wurde und in dem diese Wirkungen durch die schwingende Bewegung von *Kugeln* erzeugt werden, *welche* in einer Flüssigkeit *pulsieren.*

Es tritt aber der Fall ein, daß in diesen Modellen die vorgetäuschten Wirkungen den wirklichen *entgegengesetzt* sind. Aber POINCARÉ hat gezeigt, daß diese Umkehrung beseitigt werden kann, wenn man die Interpretation der Modelle selbst ändert.[1])

In dem BIERKNESschen Modelle kommt noch eine andere Schwierigkeit vor. Er mußte nämlich voraussetzen, daß die pulsierenden Kugeln die gleiche Periode und die gleiche Phase (oder Phasen, die sich um π unterscheiden) besitzen, und das erscheint unannehmbar.

Man kann diese Schwierigkeit beseitigen, indem man eine kontinuierliche Kontraktions- oder Dilatationsbewegung anstatt einer abwechselnden voraussetzt.

Dieser Fall entspricht der Darstellung eines elektrisierten Teilchens, wenn man eine Verallgemeinerung der

---

1) „Electricité et Optique", Paris 1901, S. 616f.

FRESNELschen Optik vornimmt, die den elektromagnetischen Erscheinungen angepaßt ist, d. h. eine Theorie, die gewissermaßen die Umkehrung derjenigen ist, die kürzlich von LARMOR als Erweiterung der Optik von MAC CULLAGH und NEUMANN konstruiert wurde.[1])

Während diese Spekulationen zu einer konkreten Darstellung der elektrischen Kräfte als Trägheitskräfte strebten, wurde HERTZ zu der Überlegung geführt, daß eine derartige Erklärung im allgemeinen für alle Kräfte möglich sein müßte, d. h. daß diese immer ersetzt werden können durch die *Bewegungen verborgener verbundener Massen*.

In seiner posthumen Mechanik findet sich eine Rechtfertigung dieser Ansicht und der Plan einer Behandlung der Wissenschaft von der Bewegung, aus der jeder eigentliche Kraftbegriff verbannt ist.

Die Grundhypothese ist also, daß verbunden mit der sichtbaren Materie unsichtbare Massen existieren, derart, daß jede Erscheinung und speziell jede Bewegung der sichtbaren Materie im allgemeinen eine Bewegung der unsichtbaren nach sich zieht. Das Gesetz der Bewegung reduziert sich auf eine *Verallgemeinerung des* GALILEI-NEWTONschen *Trägheitspostulats*.

Jedes isolierte System bewegt sich derart, daß die Folge seiner Lagen einer Minimumsbedingung entspricht, die durch das GAUSSsche *Prinzip des kleinsten Zwanges* ausgedrückt werden kann und die derjenigen analog ist, der die Gerade unter den möglichen Bahnen eines Punktes im Raume und die geodätische Linie unter den möglichen Bahnen eines Punktes auf einer Fläche entsprechen.

Die scheinbaren *Kräfte* sind nichts anderes als die *Reaktionen der starren Verbindungen*.

Das von HERTZ entworfene Schema ist von ihm nicht bis zur Behandlung bestimmter Probleme fortgeführt

1) Vgl. POINCARÉ a. a. O.

worden, bei der sich ergeben hätte, in welcher Weise und in welchem Sinne die Willkür aufgehoben werden kann, die in der Wahl der verborgenen Bewegungen enthalten ist, und welchen Vorteil man aus dieser Hypothese für die Erklärung der Erscheinungen ziehen kann.

Aber die mechanischen Darstellungen des Elektromagnetismus, die oben angeführt wurden, z. B. das Bierknessche Modell, können als Illustration des Hertzschen Programms dienen.

Anderseits kann man bemerken, daß die verschiedenen Entwickelungen der Mechanik und Physik, die wir bisher analysiert haben, im allgemeinen nach einer Reduktion der Kräfte auf den elastischen Typus streben, so daß man, um den Hertzschen Gedanken zu verwirklichen, nach dem Gesichtspunkt von Thomson die Elastizität vollständig als Bewegung behandeln muß.

§ 25. Die Elektrodynamik der bewegten Körper: die Hertzsche Theorie.

Die spekulative Entwickelung, die nach einer mechanischen Erklärung der elektromagnetischen Erscheinungen strebt, gelangt zu einem Modell vom Cartesischen Typus, das, theoretisch betrachtet, allgemein und vollkommen ist, obgleich es noch nicht in konkreter Weise adäquat ausgebildet ist. Aber die Spekulationen über diesen verborgenen Mechanismus bleiben zu weit entfernt von den konkreten Anwendungen der Theorie, die, wie wir sahen, einen Inhalt hat, der von ihrer mechanischen Grundlage unabhängig ist.

Wenn es sich darum handelt, diese Anwendungen weiter zu verfolgen und das elektrische Modell der optischen Erscheinungen zu vervollkommnen und zu erweitern, so kann man die elektrischen Kräfte als ursprüngliche Daten annehmen, ohne sich um ihre mögliche Reduktion zu bekümmern.

Dies ist der Fall in den HERTZschen Gleichungen, die wir im § 23 betrachteten, indem wir uns auf die Elektrodynamik der ruhenden Körper beschränkten. Es ist aber ebenso der Fall in den neuen Entwickelungen, zu denen der Versuch geführt hat, die verschiedenen Erscheinungen des Elektromagnetismus an bewegten Körpern in ein System zu bringen, und speziell in der LORENTZschen Theorie.

Wir wollen einen kurzen Bericht über diese Theorien geben, indem wir die vorhergehenden Arbeiten von MAXWELL beiseite lassen. Wir beginnen also mit der Behandlung der Elektrodynamik bewegter Körper von HERTZ, indem wir versuchen, die Entstehung des leitenden Gedankens, der sie beseelt, zu deuten.

Wenn wir ein ruhendes (oder als solches betrachtetes) undeformierbares Medium betrachten und in ihm ein elektromagnetisches Feld bestimmen (mittels unbeweglicher elektrisierter, magnetisierter oder von Strömen durchflossener Körper), so finden wir, daß in jedem Punkte die elektrische und magnetische Kraft durch die Differentialgleichungen verknüpft sind, deren Inhalt wir im § 23 analysiert haben.

Nun können diese Gleichungen in zweierlei Sinne verallgemeinert werden:

Erstens kann man annehmen, daß sie gelten, auch wenn das *elektromagnetische Feld durch Körper erzeugt* wird, *die sich innerhalb des gegebenen Mediums bewegen*. So wird z. B. ein elektrisierter bewegter Körper in jedem Punkte eine fortschreitende Veränderung der elektrischen Kraft hervorrufen und folglich zu einer Störung Anlaß geben, die der durch einen Strom erzeugten völlig analog ist. Dieses stimmt überein mit den Experimenten von ROWLAND, nach denen der elektrische *Konvektionsstrom* dem (VOLTAschen) *Leitungsstrom* ähnlich ist.

Zweitens, wenn die Erscheinungen sich in verschiedenen Medien ausbreiten, die gegeneinander in Bewegung sind, so kann man eine *relative Unabhängigkeit* derselben annehmen, d. h. man kann annehmen, daß in jedem von ihnen ein eigenes elektromagnetisches Feld vorhanden ist, das durch dieselben HERTZschen Gleichungen, die aber *auf das Medium bezogen* werden, definiert sind.

HERTZ nimmt diese Hypothese an, indem er sie ergänzt für den Fall von *deformierbaren* materiellen *Medien*.

Man wird auf diese Verallgemeinerung leicht durch die folgenden Überlegungen geführt.

Aus den Differentialgleichungen, die sich auf ein undeformierbares Medium beziehen, kann man *Integralgesetze* ableiten (deren eines von MAXWELL angegeben wurde), welche die Änderung der Strömung der elektrischen oder magnetischen Kraft durch eine geschlossene Oberfläche ausdrücken durch die Strömung der magnetischen bzw. elektrischen Kraft längs des Umfanges. HERTZ *nimmt als Grundhypothese an, daß diese Gleichungen für ein bewegtes Medium gelten relativ zu ihm, d. h. bezogen auf materialisierte Stromkreise, die sich mit dem Medium zusammen deformieren.*

Die HERTZsche Theorie wird vom Autor selbst als eine Gesamtheit von Hypothesen dargestellt, die vereinbar sind mit einer kleinen Zahl von Experimenten über die Bewegung elektrisierter Körper und über die Wirkungen der Induktion bei der Bewegung von Stromkreisen, die von Strömen durchflossen sind. Und der Autor hebt hervor, daß es sich in diesen Experimenten immer um Bewegungen handelt, die gegen die Lichtgeschwindigkeit langsam sind.

Die Notwendigkeit einer Korrektion ergibt sich auch aus den optischen Erscheinungen, die bei Körpern in

relativer Bewegung auftreten und speziell aus der *astronomischen Aberration.*

Sei B ein unpolarisierbares Medium, A eine Quelle von elektromagnetischen oder Lichtwellen und nehmen wir, um die Begriffe zu fixieren, an, daß A sich in großer Entfernung von B befindet, so daß man die Wellen als eben betrachten kann. B kann unsere Atmosphäre darstellen und A einen Stern. Nach Annahme bewegt sich B in bezug auf A.

Wenn man die Gleichungen an den Grenzen der Medien von A und B berücksichtigt, so führt die Hertzsche Theorie zu dem Ergebnis, daß die von A ausgesandten Wellen von B festgehalten und in seiner Bewegung mitgenommen werden, wobei sie in B den Charakter als ebene Wellen beibehalten. Daraus ergibt sich, daß die relative Ausbreitungsgeschwindigkeit in B dieselbe, V ist, die sie hätten, wenn B in bezug auf A in Ruhe wäre.

Dieser Folgerung widerspricht die seit Bradley bekannte Aberration des Lichtes. Diese Aberration zeigt nämlich, daß das Licht, das von dem Stern A kommt, sich in der Atmosphäre B mit derselben Geschwindigkeit V *in bezug auf* A zu bewegen fortfährt und sich deshalb (wenn man mit v die Geschwindigkeit der Erde bezeichnet) in bezug auf die Erde mit einer Geschwindigkeit $V - v$ bewegt.

Um die astronomische Aberration zu erklären, kann man versuchen, das Hertzsche Prinzip, das eine *lokale Relativität* der elektromagnetischen Erscheinungen ausdrückt, zu ersetzen durch ein *verallgemeinertes Relativitätsprinzip*, das mit dem synthetischen Gesichtspunkt von Faraday und Maxwell übereinstimmt.

Betrachten wir der Einfachheit halber ein undeformierbares Medium B, das sich in bezug auf A, den Sitz der elektromagnetischen Erscheinungen, bewegt.

Man kann annehmen, daß für einen innerhalb *B* befindlichen und in dem Medium mitgeführten Beobachter die Erscheinungen sich so abspielen, als ob das Medium *B* sich so weit ausdehnte, daß es *A* umfaßt.

Um eine solche Hypothese zu rechtfertigen, genügt es, sich die elektromagnetischen Erscheinungen als Störungen in einem Äther vorzustellen, die durch die *singulären Punkte* definiert sind, welche den auf *A* befindlichen elektrischen Ladungen entsprechen.

Die Ausbreitung dieser Störungen mit der Bewegung von *A* gegen *B* kann man sich einfach vorstellen, indem man sich den Äther selbst zusammen mit *A* in bezug auf *B* bewegt denkt.

Dieselbe Hypothese kann man ausdrücken, indem man den Äther zusammen mit *A* als unbeweglich betrachtet und *B* als bewegt. Wenn *A* ein Stern ist, *B* die Erde, v die Geschwindigkeit von *B* in bezug auf *A*, V die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem Medium wie unsere Atmosphäre, so findet man, daß das Licht, welches von dem Sterne ausgeht, sich in der irdischen Atmosphäre mit der Geschwindigkeit $V-v$ ausbreitet.

Daraus ergibt sich eine Erklärung der Erscheinung der Aberration in der Weise, die der Ansicht von Fresnel in der Undulationstheorie entspricht.

Aber die Erklärung gilt nur für den einfachen von Bradley beobachteten Fall.

Die Astronomen von Greenwich haben die Aberration mit einem Fernrohr gemessen, das mit Wasser angefüllt war. Die veränderte Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtwellen im Wasser müßte hier zu einem veränderten Aberrationswinkel führen. Der Winkel ändert sich aber nicht.

Dieses Resultat wurde von Fresnel dahin gedeutet, daß „der Äther in bezug auf das Wasser nicht mehr fest bleibt, sondern teilweise mitgenommen wird".

Die *teilweise Mitnahme der Lichtwellen* in der bewegten Materie wurde später durch die Experimente von Fizeau bestätigt, die kürzlich von anderen wiederholt wurden: Die Bewegung des Wassers erzeugt eine Verschiebung der durch interferierende Lichtstrahlen erzeugten Streifen.

Daraus ergibt sich, daß die feineren Experimente, welche sich auf die optisch-elektrisch-magnetischen Erscheinungen an bewegten Körpern beziehen, auch durch eine *verallgemeinerte Relativitätshypothese*, wie die oben ausgesprochene, nicht erklärt werden können. Die erwähnten Erscheinungen hängen von der relativen Bewegung der Körper ab, von der Ausbreitungsgeschwindigkeit in dem Medium, in welchem sie konstatiert werden und von *etwas anderem*, nämlich (wenn man sich an die Erfahrung hält) von qualitativen Eigenschaften der Materie, die dieses Medium bildet.

Es handelt sich darum, eine Theorie zu konstruieren, die geeignet ist, von den komplizierten tatsächlichen Bedingungen Rechenschaft zu geben.

§ 26. Die Lorentzsche Theorie.

Die Lorentzsche Theorie[1]) (1892) ist zu diesem Zwecke aufgestellt worden. Ihr Grundbegriff besteht in der Zurückführung des teilweisen Mitnehmens der elektromagnetischen Wellen durch die bewegte Materie auf die Veränderung des Feldes, die hervorgerufen wird durch die elektrischen Ladungen, welche nach Annahme von dieser Materie mitgeführt werden.

Um die Vorstellungen zu fixieren, wollen wir einen Körper A betrachten, der in bezug auf den Äther als fest

1) Für die Bibliographie vgl. man den Art. von Lorentz im Bd. V 2 Heft 1 der Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften, Leipzig, B. G. Teubner, 1904.

anzusehen ist, und einen Körper *B*, der sich in bezug auf *A* (und den Äther selbst) bewegt. Innerhalb von *B* superponieren sich dann zwei Reihen von Störungen, die von *A* und von *B* herrühren. Diese letzteren schreiten mit der Bewegung von *B* fort, und *das Gesamtergebnis* ist *äquivalent der Annahme einer teilweisen Mitnahme des Äthers innerhalb von B.*

Der vorstehende Fall kann verallgemeinert werden, indem man mehrere Körper *A*, *B*, *C* ... in relativer Bewegung betrachtet. In diesem Falle liegt kein Grund vor anzunehmen, daß einer oder der andere von diesen Körpern, von denen elektromagnetische Wellen ausgesandt werden, in bezug auf den Äther sich in Ruhe befindet.

Um diese Schwierigkeit zu überwinden, postuliert Lorentz ein *absolutes* Bezugssystem, d. h. einen von der Materie unabhängigen Äther, dessen Teile sich nicht gegeneinander verändern, und vergleicht die Bewegung der Körper mit diesem als unbeweglich betrachteten Äther.

Das Postulat ist allerdings willkürlich und wird zu Konsequenzen Anlaß geben, die wir später zu prüfen haben werden. Jetzt wollen wir versuchen, uns von der Art und Weise Rechenschaft zu geben, in der die erste Grundhypothese bei Lorentz durch ein System von atomistischen Bildern konkrete Gestalt erhält.

In der alten Theorie von Poisson gab es zwei *elektrische Fluida*, das positive und das negative (vgl. Kap. II § 26). Lorentz nimmt im wesentlichen diese Vorstellung wieder auf, sieht aber die beiden Fluida als zusammengesetzt aus materiellen Teilchen *(Elektronen)* an, deren Bewegung die Ströme hervorruft.

Für den Magnetismus nimmt er ferner die Ampèresche Hypothese an, wonach dieser die Erscheinung von Strömen in den Teilchen des Magneten ist.

So erhält man eine einheitliche Ansicht von den verschiedenen elektromagnetischen Erscheinungen.

Es ist vor allem interessant zu sehen, wie eine geniale Vergleichung verschiedener Tatsachen dazu geführt hat, die drei Arten von elektrischem Strom auf einen einzigen Typus zurückzuführen, nämlich:

1. die VOLTAschen *Ströme* in den Leitern,
2. die *elektrolytischen Ströme* in Gasen oder Flüssigkeiten, die sich zersetzen,
3. die *Konvektionsströme*, d. h. die Ströme, welche durch Bewegung elektrisierter Körper entstehen.

Die einheitliche Hypothese von LORENTZ findet ihre Grundlage in der folgenden Betrachtung:

1. Die Versuche von ROWLAND beweisen die Wirkung der Konvektionsströme auf das Galvanometer.
2. FARADAYS Gesetze der Elektrolyse lassen (wie schon MAXWELL und HELMHOLTZ bemerkten) die Erklärung zu, daß die elektrolytischen Ströme von der Bewegung kleiner und veränderlicher elektrischer Ladungen herrühren, die mit gewissen Atomgruppen verbunden sind.
3. Speziell die Tatsachen, die sich auf die Ausbreitung der Elektrizität in den Gasen beziehen, legen die Annahme einer *elektrischen Dissoziation* oder *Ionisation* derselben nahe.
4. Die Ionisation der Gase durch die *Kathodenstrahlen*, die von den CROOKESschen Röhren ausgesandt werden, legt die Ansicht nahe, daß diese Strahlen Entladungen von Elektronen sind.
5. Die Durchlässigkeit der Metalle für die Kathodenstrahlen führt zu der Annahme, daß die Elektronen sich in den Leitern frei bewegen können, wie es die Hypothese erfordert, nach der die VOLTAschen Ströme in der Bewegung von Elektronen bestehen.

In welcher Weise liefern nun die Ansichten von Lorentz ein System von bestimmten Hypothesen, die sich durch Gleichungen eines elektromagnetischen Feldes ausdrücken lassen?

Für den freien Äther werden ohne weiteres die Hertzschen Gleichungen angenommen. Das gleiche findet statt für den in der Materie enthaltenen Äther, wenn sich dort keine elektrisierten Teilchen befinden, abgesehen von der Notwendigkeit, die Kräfte zu berücksichtigen, welche die Elektronen selbst auf die Materie ausüben. Die ganze Schwierigkeit besteht darin einzusehen, wie diese Gleichungen modifiziert werden müssen für das Feld im Innern eines Elektrons, dem endliche Ausdehnung zugeschrieben wird. Wir werden nicht versuchen, diesen Punkt aufzuklären und uns auf die Bemerkung beschränken, daß hier einige Hypothesen eingeführt werden, die a priori nur teilweise gerechtfertigt sind und die später durch die daraus abgeleiteten Folgerungen indirekt bestätigt werden können.

Wenn die Elementargesetze sozusagen der Erscheinungen einmal aufgestellt sind, so hat man weiter nichts zu tun, als sie zu superponieren, um im allgemeinen diese Gleichungen abzuleiten, die nach Lorentz das allgemeinste elektromagnetische Feld darstellen. Dazu muß man für jeden Punkt das *Mittel* aus den Wirkungen nehmen, welche durch die Bewegung der Elektronen hervorgerufen werden.

Wir haben demnach hier eine *statisch-kinetische Theorie der Bewegung der Elektronen*, die an die kinetische Gastheorie erinnert.

Und das wichtige ist folgendes: Die Theorie gibt nicht nur Rechenschaft von den Tatsachen, im Hinblick auf welche sie aufgestellt wurde, sondern sie liefert auch eine gute Erklärung für die Experimente Faradays über die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in

einem Magnetfelde und läßt neue Beziehungen zwischen dem Licht und dem Magnetismus voraussehen, besonders die Teilung der Linien des Spektrums in einem magnetischen Felde, die von ZEEMANN verifiziert wurden.

Allerdings haben neue Experimente über diese Erscheinung zu einer teilweisen Modifikation der Voraussagen geführt und die ursprünglichen Gesichtspunkte von LORENTZ kompliziert. Aber die auf dem Wege der Rechnung durch die Theorie herbeigeführte experimentelle Entdeckung bedeutet immer einen Erfolg für diese Theorie.

Und der Erfolg springt in dem uns beschäftigenden Falle um so mehr in die Augen, als es einem Ziele der elektromagnetischen Optik entspricht, neue positive Beziehungen zwischen dem Licht und dem Elektromagnetismus zu entdecken.

§ 27. Kritik: das Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.

Das Interesse, das die LORENTZsche Theorie erregte, ihr Erfolg in der Erklärung der bekannten Tatsachen und in der Voraussage neuer hat die Kritik der berühmtesten Gelehrten auf sie gelenkt und den Anstoß zu den ausgedehntesten Verifikationsversuchen gegeben.

Vom Standpunkt der klassischen Dynamik hat die LORENTZsche Theorie einen großen Mangel: *Sie genügt nicht dem* NEWTONschen *Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung;* wenigstens ist das Prinzip nicht erfüllt, wenn man es in der einzigen Art verstehen will, in der es eine positive Bedeutung hat, nämlich *bezogen auf die Materie.*

Man kann sich leicht davon Rechenschaft geben, daß diese Folgerung sich nicht sowohl aus den besonderen LORENTZschen Gesichtspunkten ergibt, als vielmehr aus der Rolle, die nach dem MAXWELLschen Gedanken dem

Äther als Ausbreiter der scheinbaren Fernwirkungen zuerteilt wird.

Ein vom Lichte getroffener Körper erfährt einen Druck, der schon von MAXWELL und BARTOLI vorausgesehen wurde und durch LEBEDEFF experimentell bestätigt wurde, und oblgeich es sich um feine Experimente handelt, erscheint das Ergebnis um so plausibler, als es mit den Erscheinungen übereinstimmt, die bei der Bewegung der Kometen auftreten und die schon FAYE zur Annahme einer ähnlichen Hypothese veranlaßt hatten.

Nun verträgt sich der MAXWELL-BARTOLIsche Druck nicht mit dem NEWTONschen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung, weil der Augenblick, in dem das Licht einen Körper trifft, nicht mit demjenigen übereinstimmt, in welchem es die Quelle verläßt.

Aber mehr noch; eine tiefer gehende Analyse POINCARÉs hat gezeigt, daß die Verletzung des NEWTONschen Prinzips notwendig verknüpft ist mit jeder elektromagnetischen Theorie, die von der *teilweisen Mitnahme der Lichtwellen* Rechenschaft geben will.

Man kann diese Notwendigkeit leicht einsehen, wenn man sich einen Augenblick an die HERTZschen Hypothesen erinnert.

Zwischen zwei in relativer Ruhe befindlichen elektrisierten Körpern *A* und *B* wirken elektrostatische Kräfte gemäß dem NEWTONschen Prinzip. Wenn aber *A* und *B* sich bewegen und die Wirkung sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, so ist die Kraft, welche auf jeden Punkt von *A* wirkt, nicht mehr nach den Punkten von *B*, von denen sie ausgeht, gerichtet. Es kommt aber als Korrektionsglied in den HERTZschen Gleichungen die AMPÈREsche Wirkung hinzu, die zwischen den *Stromelementen*, welche der Bewegung von *A* und *B* entsprechen, stattfindet. Und demnach wird das NEW-

TONsche Prinzip für die zusammengesetzten Wirkungen erfüllt.

Setzen wir nun aber voraus, daß die Ausbreitung der von *A* auf *B* ausgeübten Kraft durch die Bewegung eines *B* begleitenden Mediums modifiziert wird (dies ist im wesentlichen die Hypothese, welche der erwähnten Mitnahme entspricht). Dann ergibt dies eine Veränderung der Richtung der auf *B* wirkenden zusammengesetzten Kraft, d. h. jene zufällige Kompensierung, welche in der HERTZschen Theorie stattfand, wird wieder aufgehoben. Das NEWTONsche Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung gilt nicht mehr!

Und dieses Ergebnis entspringt nicht sowohl aus den besonderen Hypothesen von LORENTZ als vielmehr aus den Versuchen von FIZEAU. Der Fall des Prinzips drängt sich als Tatsache auf.

Wir werden weiterhin die Folgen davon diskutieren.

§ 28. Das Relativitätsprinzip.

Wir kommen nun zu einem anderen schwerer wiegenden Umstand, der nur scheinbar mit dem vorigen verbunden ist.

Die LORENTZsche Theorie läßt die Möglichkeit zu, die *Bewegung der Materie in bezug auf den Äther* festzustellen, d. h. eine wahre *absolute Bewegung*, die nicht von den Beziehungen der Körper zueinander abhängt!

Man hat über die Möglichkeit eines verifikatorischen Experimentes diskutiert. Man hat zuerst gefunden, daß bei irdischen Experimenten die Lichterscheinungen die Bewegung der Erde nicht erkennen lassen bei einem Grade von Approximation, bei dem das Quadrat der astronomischen Aberration vernachlässigt wird. Aber, wie wir sehen werden, hat man feinere Experimente erdacht, die ein merkbares Ergebnis haben müßten; der Ausgang war negativ.

Allerdings hat das keineswegs Verwunderung hervorgerufen; aber man muß sich von den Gründen Rechenschaft geben, die in der LORENTZschen Theorie zu einem so merkwürdigen Ergebnis führen. Man wird sogleich erkennen, daß die Erfolge der Theorie nicht, wie man annehmen könnte, a priori irgendeine Präsumtion zugunsten der durch das Experiment widerlegten Annahme einschließen.

LORENTZ hat seine Auffassung von den Elektronen durch eine geniale Zusammenfassung verschiedenartiger Tatsachen erhalten. Der Wert seiner Hypothesen beruht auf den vorhergehenden Beobachtungen, die in ihnen enthalten sind. Aber in der Beziehung der Bewegung der Elektronen auf einen ruhenden Äther, der von den Körpern unabhängig ist, ist der große Physiker einem willkürlichen Kriterium gefolgt, wenn es auch für die Zwecke der mathematischen Behandlung bequem sein mag. Nun ist es gerade diese willkürliche Annahme, diese Art von Absolutem, das der Theorie zugrunde gelegt wird, welche sich in den späteren Ableitungen wiederfindet. Diese erhalten daher keine größere Glaubwürdigkeit durch den Umstand, daß sie mit Hypothesen verknüpft sind, welche einen annehmbaren Ursprung haben.

Wir wollen aber die Folgerungen prüfen, zu denen die Entwickelung der Theorie geführt hat.

Ein materielles System S bewege sich in bezug auf den Äther mit einer z. B. gleichförmigen Translation.

Zwei mit S verbundene elektrisierte Punkte A und B üben aufeinander nicht mehr eine einfache elektrostatische Wirkung aus, sondern erzeugen zwei Ströme, deren AMPÈRESche Wirkung die erste vermindert; allerdings wäre diese Korrektion im positiven Sinne als nicht vorhanden zu betrachten, wenn sie nicht von der Stellung von A und B in bezug auf die Translationsrichtung

abhinge, da sie in diesem Falle von einem mit S mitgeführten Beobachter nicht gemessen werden könnte, sondern nur von einem solchen, der Vergleiche anstellen könnte mit dem, was im unbeweglichen Äther stattfindet. Aber die erwähnte AMPÈREsche Wirkung hängt von der Richtung der Geraden AB ab und wird deshalb durch Experimente innerhalb S konstatierbar.

Ein von MICHELSON 1881 ausgeführtes und von demselben Experimentator zusammen mit MORLEY 1887 wiederholtes optisches Experiment entspricht dem durch die vorstehenden Betrachtungen gestellten Probleme.

Schematisch dargestellt handelt es sich um folgendes:

In S sind drei Punkte A, B, C gegeben als Spitzen eines gleichschenkligen Dreiecks, das in A einen rechten Winkel hat. AB ist die Richtung der translatorischen Bewegung von S, AC steht senkrecht darauf; dann muß die Lichtgeschwindigkeit von A nach B verschieden sein von der von A nach C.

Das auf der Erde gemachte Experiment läßt keinen Unterschied erkennen. Nun zeigt die Berechnung dieses Unterschiedes, daß er von der Größenordnung des Quadrates der Aberration ist und deshalb feststellbar sein müßte!

Deshalb hat man aus dem MICHELSONschen Versuch eine Bestätigung des *Relativitätsprinzips* entnommen: ***mittels optisch-magnetischer Experimente innerhalb eines bewegten Systems kann man die translatorische Bewegung desselben in bezug auf den Äther nicht feststellen.***

Um dieses negative Ergebnis zu erklären, haben LORENTZ selbst und FITZ GERALD die Annahme gemacht, daß die sämtlichen Längen der bewegten Körper in der Richtung der Translation eine kleine Verkürzung erfahren. Demnach *erscheinen* die Entfernungen AB und AC im Experimente als gleich; in *Wirklichkeit* (d. h. in bezug auf den Äther) sind sie als verschieden zu betrachten.

Um diese Verkürzung (die auf der Erde von der Ordnung des Quadrates der Aberration ist), plausibel zu machen, und um eine vollständige Erklärung des Relativitätsprinzips (wenigstens für den Fall der gleichförmigen Translation) zu erhalten, hat man zu anderen Hypothesen seine Zuflucht genommen, nämlich zu der Annahme, daß die Molekularkräfte, von denen im Grunde die Dimensionen der Körper abhängen, elektromagnetischen Ursprungs seien, daß die Materie selbst eine Vereinigung von Elektronen sei (§ 31) und daß diese, anstatt eine unveränderliche Kugelgestalt (ABRAHAM) zu behalten, eine Kontraktion erfahren, als ob der Äther bei der Bewegung auf sie drückte und sie so in abgeplattete Ellipsoide verwandelt, sei es, indem sie dasselbe Volumen behalten (BUCHERER, LANGEVIN), sei es, indem sie zwei gleiche Achsen behalten (LORENTZ).[1])

Diese letztere Hypothese ist allerdings die einzige, die mit dem Vorangehenden kombiniert, das Relativitätsprinzip erklärt und die sich nach POINCARÉ[2]) durch die Annahme rechtfertigt, daß der Äther auf das deformierbare Elektron einen konstanten Druck ausübt, dessen Arbeit der Volumveränderung proportional ist.

Nun ziehen die oben erwähnten Hypothesen eine radikale Umformung der klassischen Dynamik nach sich, die durch eine *elektrische Dynamik* ersetzt wird, von der wir später reden werden. Hier wollen wir uns darauf beschränken, das Resultat zusammenzufassen, zu dem wir in der uns beschäftigenden Frage geführt worden sind.

Das Prinzip der Relativität für die elektromagnetischen Erscheinungen läßt sich in der LORENTZschen Theorie mit Hilfe der folgenden Hypothesen und Überlegungen erklären:

---

1) Vgl. die Verhandlungen der Amsterdamer Akademie, Mai 1904.

2) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, Juni 1905.

1. Die Körper bestehen aus *Elektronen*, die sich bei einer Translation *zusammenziehen* und in abgeplattete Ellipsoide verwandeln durch die Wirkung eines *Ätherdrucks*, dessen Arbeit der Volumveränderung des Elektrons proportional ist.
2. Alle *Kräfte* sind *elektromagnetischen Ursprungs.*
3. Die *Messungen*, die innerhalb eines bewegten Systems vorgenommen werden, *hängen ab* von den Dimensionen der Instrumente, von den Kräften, die als Vergleichsgrößen benutzt werden und von der *Ortszeit.*

Man denkt sich die *wahre Zeit* t definiert in bezug auf einen mit dem Äther verbundenen ruhenden Beobachter. Ein mit der Materie mitgeführter Beobachter, der mit dem ersten mittels optischer (oder elektrischer usw.) Signale verkehrt, hat ein Zeitmaß τ, wo

$$\tau = at + b$$

(vgl. Kap. V § 8); a und b sind *Ortskonstanten*, von denen die erste von der (als gleichförmig vorausgesetzten) Translationsgeschwindigkeit, die zweite auch von der Entfernung zwischen dem bewegten und dem ruhenden Beobachter abhängt.

Die Theorie erfordert, daß τ den Angaben der Uhren in S entsprechend angenommen wird, vorausgesetzt, daß die Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Uhren in S so hergestellt wird, als ob die Zeit, welche das Licht braucht, um von einem Punkte A zu einem Punkte B zu gelangen, von der Richtung der Strecke AB unabhängig ist, was für die wahre Zeit nach der LORENTZschen Hypothese nicht mehr gilt.

§ 29. Äther und Materie.

Die Erklärung des Relativitätsprinzips für elektromagnetische Erscheinungen ist von POINCARÉ (a. a. O.)

auf eine plausible mathematische Form gebracht worden, die wir folgendermaßen wiedergeben können:

Der Geometrie und speziell der Definition der Kongruenz von Figuren liegt eine Gruppe von Transformationen *(geometrischen Bewegungen)* zugrunde, welche hypothetischen Bewegungen des starren Äthers entsprechen. Dann definieren die Bewegung starrer Körper innerhalb eines beweglichen materiellen Systems *S*, die Messungen der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes usw. gleichfalls innerhalb *S* eine *scheinbare* Kongruenz der Figuren, die von der Bewegung von *S* in bezug auf den Äther abhängt. Sie drückt eine invariante Beziehung aus nicht mehr in bezug auf die Gruppe der geometrischen Bewegungen, sondern in bezug auf eine *neue Gruppe von Transformationen* (die Gruppe der *scheinbaren* Bewegungen, die aus den *wirklichen* geometrischen Bewegungen durch eine Lorentzsche Transformation hervorgehen).

Hier wird ein transzendenter Begriff der Kongruenz dem experimentell definierten gegenübergestellt, und der erste wird als eine *metaphysische Wirklichkeit*, der zweite als *physikalischer Schein* betrachtet!

Eine ähnliche Folgerung ergibt sich aus der der Theorie zugrunde liegenden Vorstellung eines *von der Materie abhängigen Äthers*.

Aber die Kritik strebt nach einer Befreiung von dieser Art von Absolutem. Sie verweist die Hypothese des ruhenden Äthers unter diejenigen, die auch nicht einmal Gegenstand der indirekten Kontrolle durch mögliche Experimente werden können, und nimmt ihr deshalb jede Bedeutung. Sie sieht in ihr lediglich einen Kunstgriff.

Dieser Kunstgriff kann für die mathematische Behandlung bequem erscheinen; aber man kann nicht leugnen, daß er auch eine gefährliche Seite hat, indem

er einige Zeitlang Zweifel gerechtfertigt hat, die keinen plausiblen Grund hatten. Immerhin werden wir uns wegen dieser Zweifel nicht allzu große Sorgen machen, da sie, und zwar zuerst von dem Gründer der Theorie, offen anerkannt worden sind und zu einem Versuch einer Vereinheitlichung der Kräfte die Veranlassung gegeben haben, der sich als ein verführerisches Versprechen für die Zukunft darstellt.

Wir wollen nur den Weg zeigen, auf dem man nach unserer Ansicht a priori die fiktiven Fragen beseitigen müßte, die sich aus jenem Kunstgriff ergeben.

Es handelt sich um die Gewinnung einer befriedigenderen Vorstellung vom *Äther*, die *mit der Materie in Beziehung stehen* muß.

Man darf sich nicht darüber täuschen, daß der Äther nur ein Vermittler für die Beziehungen zwischen den materiellen Körpern ist. Daher sind diese Körper in Wirklichkeit das *Gegebene*, und man muß von ihnen ausgehen, um eine Vorstellung des Äthers zu *konstruieren*.

Nun werden aber die Beziehungen zwischen Äther und Materie bei dem Studium der mannigfachen mechanischen Modelle (§ 24) im allgemeinen vom entgegengesetzten Gesichtspunkt aus betrachtet. Man nimmt eine Flüssigkeit mit gewissen Eigenschaften als gegeben an, ein vereinfachtes Bild der wirklichen Flüssigkeiten (z. B. ein homogenes unendlich zusammendrückbares Fluidum oder analog einem festen beweglichen oder unbeweglichen Körper usw.), und man betrachtet die Materie als *singulären Punkt* in dieser Ätherflüssigkeit; sei es, daß die materiellen Punkte als Punkte der *Zerstörung* oder *Löcher* im Äther betrachtet werden oder daß man sie sich als *Wirbel* oder *Torsionspunkte* usw. denkt.

Derartige Spekulationen bedeuten den Versuch *durch Analogie* die erscheinungsmäßigen Beziehungen zu-

sammenzufassen, die man sich mit der *Gesamtheit* der Körper verknüpft denkt. Ihre Bedeutung besteht in der Ansicht von einem *universellen Zusammenhange* aller Gegenstände der Sinne, der der Anschauung der Materie selbst, d. h. der Unterscheidung zwischen *inneren* und *äußeren* Eigenschaften, die sich an sie knüpfen, gegenübersteht.

Aber um den Zusammenhang der Sinneswelt auszudrücken und die abstrakten Unterscheidungen in bezug auf denselben zu *korrigieren*, wird man schwerlich mit einem a priori konstruierten Modelle auskommen.

Man kann sich deshalb nicht wundern, wenn auch die von genialen Männern erdachten Modelle die Beziehungen, die man erklären will, schlecht wiedergeben, und wenn Theorien, die von jedem mechanischen Modell absehen, dieses Ziel der Erkenntnis in gleicher Weise erreichen.

Wir fragen nach einer *Definition des Äthers als eines Dinges, das an jedem Orte und in jedem Augenblick von der ganzen mehr oder weniger entfernten Materie abhängig ist*, z. B. eine Gesamtheit von Teilchen, die von den materiellen Körpern ausstrahlen oder sich in ihnen verdichten; Teilchen, deren Bewegungen mit den Erscheinungen der Materie verknüpft sind und durch die physikalischen Beziehungen zwischen den Körpern wenigstens nach ihrer mittleren Wirkung erkannt werden können.

Wir glauben, daß eine derartige einheitliche Vorstellung im Gebiete der Physik der Strahlungserscheinungen bald auftreten wird, während man heute die Emissionsstrahlen (Ströme von Elektronen) und die schwingenden Strahlungen (die von der magnetischen Kraft nicht abgelenkt werden) als von Grund aus verschieden ansieht. Es wird dies gewissermaßen ein Wiederauftauchen der Emissionsoptik sein, die aber gründlich umgeformt ist.

Ohne uns bei den Schwierigkeiten eines solchen Programms aufzuhalten, wollen wir uns darauf beschränken hervorzuheben, daß die von uns geforderte Äthervorstellung a priori aus der Elektrodynamik der bewegten Körper die sinnlosen Fragen beseitigen würde, die sich aus der Annahme eines absoluten Bezugssystems ergeben. Es würde sich nur darum handeln, für jedes Medium und für jede Art von Erscheinungen, die dort auftreten, zu wissen, welcher Art die Ätherteilchen sind, denen die Erscheinungen zugeschrieben werden müssen. Und wenn bei den Erscheinungen, die innerhalb eines Mediums ihren Ursprung haben, nur die Körper in Betracht gezogen werden, die sich darin befinden, so bleibt das Relativitätsprinzip a priori gesichert.

§ 30. Die Dynamik des Elektrons: die Strahlungen.

Wir haben (§ 28) erwähnt, daß die Erklärung des Relativitätsprinzips für die elektromagnetischen Erscheinungen aus den neuesten Entwickelungen der Elektronentheorie, aus denen eine *elektrische Dynamik* entstanden ist, sich ergeben hat.

Der Ausgangspunkt der neuen Theorie ist das Studium der mannigfachen Strahlungen, die in einem Magnetfelde abgelenkt werden (Kathodenstrahlungen, Becquerel-Strahlen usw.), und die man zur Erklärung ihrer Eigenschaften als Ströme von Elektronen anzusehen gezwungen war.

Wenn man diese Hypothese (von Becquerel und von J. J. Thomson) annimmt, so hat man in diesen Strahlungen ein Beispiel von elektrisierten Körpern, die sich mit ungeheuren Geschwindigkeiten bewegen, welche wenig von der des Lichtes verschieden sind. Die Geschwindigkeiten, die in der gewöhnlichen Dynamik vorkommen, sind, damit verglichen, sehr klein.

Um die Bewegung der Elektronen in den Kathodenstrahlen usw. zu behandeln, muß man berücksichtigen, daß die Beschleunigung oder Verzögerung dieser Bewegung einen Strom hervorruft, der das elektromagnetische Feld verändert. Wenn man diese Veränderung in Rechnung zieht, so kann man eine *Dynamik des Elektrons* aufstellen, deren Prinzipien in der Untersuchung der erwähnten Strahlungen Anwendung und Bestätigung finden (ABRAHAM, SCHWARZSCHILD, KAUFMANN usw.).

Die Vektorgleichung der Bewegung eines Elektrons kann auf eine Form gebracht werden, die derjenigen der NEWTONschen Bewegungsgleichung eines Massenpunktes analog ist.

Wenn wir in der letzteren mit m die Masse des Punktes, mit a_g die Beschleunigung und mit f_g die Kraft in der Richtung g bezeichnen, so haben wir

$$m\, a_g = f_g$$

Nun muß man an Stelle von m einen Ausdruck von der Form $m + m_g$ setzen und also schreiben

$$(m + m_g)\; a_g = f_g$$

Die Größe m , die zu der eigentlichen Masse m des Elektrons hinzukommt, ist nicht mehr eine Konstante, sondern hängt ab von der geometrischen Form des Elektrons selbst, von seiner elektrischen Ladung und von der Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit in bezug auf g. Sie hat den Namen ***elektromagnetische Masse*** erhalten.

Wenden wir die vorstehende Gleichung auf den Fall der Strahlen an, die man als Ströme von negativen Elektronen betrachtet.

Eine elektrische oder magnetische Kraft lenkt diese Strahlen ab und aus der erhaltenen Ablenkung, aus der Berechnung der mitgeführten Ladung und der entwickelten Wärme kann man in verschiedener Weise ein Maß für die zusammengesetzte Masse $m + m_g$ ableiten.

Für die Strahlen, deren Geschwindigkeit nahe gleich einem Zehntel der Lichtgeschwindigkeit ist, findet man diese Masse ungefähr tausendmal kleiner als die des Wasserstoffatoms.

Aber für Kathodenstrahlen mit großen Potentialdifferenzen zwischen den Elektroden, die mit einer Geschwindigkeit begabt sind, welche bis zu $^9/_{10}$ von derjenigen des Lichtes steigt, hat KAUFMANN weit größere Massen gefunden.

Die verschiedenen Versuchsergebnisse lassen sich gut darstellen, wenn man voraussetzt, daß die elektromagnetische Masse m_g m weit übersteigt oder auch wenn man m gleich Null setzt. Unter dieser Annahme ist die Masse eines Elektrons rein elektromagnetisch, d. h. die *Trägheitskräfte*, die nötig sind, um die Bewegung eines Elektrons zu beschleunigen, oder die aus seiner Verzögerung entstehen, ***erklären sich als eine elektromagnetische Erscheinung.***

§ 31. Elektrische Dynamik.

Die Dynamik des Elektrons führt auf eine *Erklärung* der NEWTONschen Dynamik, die sich hier als eine angenäherte Theorie für Bewegungen mit kleinen Geschwindigkeiten darstellt (Wien 1901).

Nehmen wir zunächst an, daß ein materieller Punkt als ein Elektron betrachtet werden kann, und betrachten wir z. B. seine elektromagnetische Masse m_1 in der Richtung der Bewegung *(longitudinale Masse)*. Wenn wir mit V die Lichtgeschwindigkeit, mit v die Geschwindigkeit des Elektrons, mit e seine Ladung und mit r seinen Radius (das Elektron als kugelförmig betrachtet) bezeichnen, so ergibt sich:

$$m_1 = m_0 \left(1 + \frac{6}{5}\frac{v^2}{V^2} + \cdots\right),$$

$$m_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{V^2 r}$$

In ähnlicher Weise kann man die *transversale Masse* des Elektrons (die zu der auf der ersten senkrechten Richtung gehört) in eine Reihe nach geraden Potenzen von $\frac{v}{V}$ entwickeln, deren erstes Glied immer m_0 ist.

Daraus folgt, daß, *wenn v klein ist im Vergleich zu V, die elektromagnetische Masse des Elektrons sich merklich auf die Konstante m_0 reduziert.*

Das bedeutet, daß für kleine Geschwindigkeiten das NEWTONsche Gesetz angenähert als Bewegungsgesetz des Elektrons gilt.

Nun geht man von der Dynamik des Elektrons zu einer neuen elektrischen Dynamik der Körper über mit Hilfe einiger Annahmen über die Konstitution der Materie und über die Kräfte. Man wird dadurch dazu geführt, die elektrische Erklärung des NEWTONschen Bewegungsgesetzes auch auf den Fall eines Massenpunktes auszudehnen, der nicht mehr als ein einzelnes Elektron betrachtet werden kann, sondern sich vielmehr als ein Aggregat von Elektronen darstellt.

Eine *elektrische Theorie* der Materie ist von LODGE (1902) entwickelt worden. Sie besteht in der Annahme, daß das Atom aus einem System von positiven und negativen Elektronen besteht, wobei die letzteren sich wie Satelliten um die ersteren bewegen.

Eine solche Bestimmung dieses Modells ergibt sich aus der Vergleichung der verschiedenen Strahlungsarten, besonders aus dem Unterschied zwischen den aus negativen Elektronen bestehenden Strahlen und denen, die aus positiven Elektronen bestehen (Kanalstrahlen, α-Strahlen des Radiums).

Die *elektrische Theorie* der Materie führt zu einer ebensolchen *der Kräfte.* Die inneren Kräfte der Materie (die elastischen, chemischen usw.) werden als Resultanten der Wirkungen dargestellt, die zwischen den

Elektronen stattfinden. Auch die Gravitation gestattet, wie wir später ausführen werden, eine elektrische Erklärung.

Daraus leitet man ab, daß die Bewegungsgesetze eines Körpers, der als Massenpunkt zu betrachten ist, dieselben sind, welche die Bewegung eines Elektrons beherrschen, d. h. die Bewegung wird dargestellt durch die Vektorgleichung

$$f_g = m_g a_g,$$

die *der Form nach* der NEWTONschen Gleichung ähnlich ist, aber in der die *elektromagnetische Masse* m_g nicht mehr eine Konstante ist, sondern von der Geschwindigkeit und von der Richtung der Bewegung in bezug auf die der Kraft g abhängt.

Nun ist m_g die Summe der Vektoren, welche den Elektronen entsprechen, die den Körper (Massenpunkt) zusammensetzen. Sie hängt deshalb ab:

1. von den *inneren* Bewegungen der Elektronen in den Atomen oder Molekülen.

Man kann nicht sagen, daß die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen gegen die des Lichtes vernachlässigt werden können; denn man muß manchmal die Annahme machen, daß sie wesentlich größer sind als die Geschwindigkeiten der gewohnten Bewegungen. Aber wenn die Dimensionen des Massenteilchens groß sind gegen die der Elektronen, so entspringt die gesamte elektromagnetische Masse als Mittel aus diesen inneren Bewegungen und kann deshalb als konstant betrachtet werden.

2. von der *äußeren* oder sichtbaren Bewegung des Massenteilchens.

Da es sich jedoch hier um Geschwindigkeiten handelt, die gegen die Lichtgeschwindigkeit klein sind, so beeinflußt diese äußere Bewegung die elektromagnetische Masse nicht merklich.

Im ganzen kann also m_g als konstant betrachtet werden, d. h. *für verhältnismäßig kleine Geschwindigkeiten finden die Bewegungsgesetze der elektrischen Dynamik einen angenäherten Ausdruck in den Gesetzen der* NEWTONschen *Dynamik.*

Dieses Ergebnis ist sehr interessant. Es stellt eine Umkehrung in dem klassischen Problem der mechanistischen Philosophie dar. *Anstatt die elektromagnetischen Erscheinungen durch ein mechanisches Modell zu erklären, gelingt es, ein elektrisches Modell der Mechanik selbst herzustellen, das außerdem eine Korrektion der letzteren einschließt.*

Dies ist das Ergebnis, zu dem der am weitesten fortgeführte Versuch der Vereinheitlichung der Kräfte im Sinne der NEWTONschen Ideen geführt hat. Es geht aus ihm eine *nichtnewtonsche Dynamik* hervor, aus der sich die klassischen Gesetze als Grenzfall ergeben!

§ 32. Die elektrische Erklärung der Gravitation.

Wir werden später die Bedeutung dieser induktiven Entwickelung der Dynamik noch näher untersuchen. Zunächst wollen wir jedoch die positiven Folgerungen betrachten, die sich daraus für die Theorie der Gravitation in bezug auf die planetarische Astronomie ergeben.

Indem er einen Gedanken **MOSSOTTIS** wieder aufnahm, hat LORENTZ (1900) die Hypothese aufgestellt, daß die NEWTONsche Anziehung zwischen den Körpern sich erklären lasse als Resultante der Wirkungen zwischen den in ihnen enthaltenen Elektronen. Es genügt dazu, einen kleinen Unterschied anzunehmen zwischen der Anziehung und der Abstoßung, die eine elektrische Ladung auf zwei andere äquivalente, aber ungleichnamige ausübt. Die elektrische Theorie der Materie legt diese Annahme nahe.

Nun folgt aus ihr, daß die Gravitation sich mit der Geschwindigkeit des Lichtes ausbreiten müßte; und dies scheint den Ergebnissen von Laplace und Lehmann-Filhes (vgl. Kap. V § 29) zu widersprechen.

Aber für diese Autoren war die Ausbreitungszeit der Gravitation die einzige einzuführende Korrektionshypothese.

Dagegen behauptet Poincaré[1]), indem er andere kleine Korrektionen berücksichtigt, die sich auf die Hypothesen der oben erwähnten elektrischen Dynamik beziehen, eine gewisse Kompensation gefunden zu haben, durch die die Abweichung von dem Newtonschen Gesetz anstatt (wie in den Rechnungen von Laplace) von der Ordnung der astronomischen Aberration zu sein, von der Ordnung ihres Quadrates wird.

Es erscheint demnach möglich, daß die Ausbreitung der Schwerkraft mit Lichtgeschwindigkeit mit den astronomischen Beobachtungen in Einklang zu bringen ist.

Weitere Untersuchungen müssen darüber Aufschluß geben.

Wenn daraus sich im besonderen eine Korrektion der kleinen Abweichungen von der Newtonschen Theorie (Kap. V § 29) ergibt, so würde dies eine weitere Bestätigung der Hypothesen der elektrischen Dynamik bedeuten.

§ 33. Ergebnisse: Die allgemeine *nichtnewtonsche* Dynamik.

Vergegenwärtigen wir uns die in den vorhergehenden Paragraphen behandelten Entwickelungen und sehen wir zu, was sich daraus für eine genauere Verifikation der Mechanik oder für eine Korrektion derselben ergibt.

---

1) Comptes rendus a. a. O.

Der leitende Gedanke, das Studium der Physik als eine Ausdehnung der Dynamik zu betreiben, erweist sich bis zu einem gewissen Grade nachträglich als gerechtfertigt durch den Erfolg der deduktiv abgeleiteten Voraussagen auf der Grundlage von Beobachtungen und Versuchen, die in verschiedenen Gebieten die ergänzenden Hypothesen liefern.

Immerhin ist der Erfolg kein vollkommener, und alles in allem muß man folgendes feststellen:

1. Die verifizierten Ergebnisse haben oft eine größere Allgemeinheit als die Voraussetzungen, so daß sie nicht als ein Beweis für die Hypothesen der klassischen Mechanik dienen können, der genauer wäre als derjenige, den man den direkten Beobachtungen und Versuchen entnimmt (§ 16).
2. Die mechanische Erklärung einiger Erscheinungen erfordert die Hinzunahme von Mittel- und Grenzbetrachtungen (§ 15).
3. Andere Erscheinungen entziehen sich der Voraussage durch die mechanische Theorie und können mit ihr nicht in Einklang gebracht werden; es sei denn, daß man etwas künstliche und unbestimmte Hypothesen annimmt, so z. B. die Erscheinungen der Hysteresis (§ 12).
4. Endlich scheinen einige optische oder elektromagnetische Erscheinungen den Prinzipien der klassischen Mechanik und besonders dem NEWTONschen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung direkt zu widersprechen (§ 27).

Daraus ergibt sich folgender Schluß: *Anstatt eine genauere Verifikation der klassischen Mechanik zu liefern, führt die Physik vielmehr zu einer Korrektion der a priori als streng gültig betrachteten Prinzipien dieser Wissenschaft.*

Es ergibt sich auch, daß die durch die elektromagnetische Optik herbeigeführte Korrektion das *verall-*

gemeinerte Trägheitsgesetz trifft, vermöge dessen das Newtonsche Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung aus einer statischen Symmetrie abgeleitet werden kann (vgl. Kap. V § 22).

Es handelt sich nun darum, zu erkennen, welche Art von Hypothesen man in einer allgemeinen *nichtnewtonschen Dynamik* an die Stelle dieses Prinzips zu setzen hat, wenn man die Postulate festhält, die implizite in den Grundbegriffen enthalten sind, und die Gesetze des Gleichgewichts und der beginnenden Bewegung (vgl. Kap. V § 23). Es handelt sich also darum, die Korrektionen, die sich vordem als nötig erwiesen haben, in diesen Rahmen einzuspannen und besonders zu zeigen, daß die elektrische Dynamik sich als eine besondere Bestimmung der nichtnewtonschen Hypothese erweist.

Versuchen wir, uns von der Veränderung Rechenschaft zu geben, die die klassischen Ansichten erfahren, wenn man das verallgemeinerte Trägheitsgesetz fallen läßt. Wir wollen uns zu diesem Zweck auf einen einfachen schematischen Fall beziehen.

Mehrere Körper A, B, C ..., die in bezug auf die Richtungen der Sterne unbeweglich sind, definieren in einem gewissen Gebiete S des Raumes ein Kraftfeld.

Das bedeutet, daß, wenn man einen materiellen Punkt P an irgendeine Stelle von S bringt, man auf ihn eine bekannte Kraft ausüben muß, um ihn festzuhalten, eine Kraft, von der wir allgemein annehmen können, daß sie von der Masse m von P abhängt.

Denken wir uns auf P einen Impuls ausgeübt. Die Bewegung von P setzt sich fort unter der Wirkung des anfänglichen Impulses und der Kraft, die wie oben für jede Lage in bezug auf S definiert ist. Das verallgemeinerte Trägheitsgesetz erlaubt diese beiden bestimmenden Umstände einfach zu *summieren* oder diejenigen zu summieren, die für jeden Augenblick sich er-

geben: die Geschwindigkeit von P in diesem Augenblick und die Kraft, die auf P infolge seiner *augenblicklichen* Lage ausgeübt wird.

Die Voraussage der künftigen Bewegung von P wird also letzten Endes abgeleitet aus der Superposition dieser bekannten bestimmenden Umstände, nämlich:

1. der *inneren* Eigenschaften von P, d. h. seiner Masse,
2. der *äußeren* Umstände, d. h. des durch $A, B, C \ldots$ definierten Kraftfeldes,
3. einer einfachen *Beziehung* zwischen P und $A, B, C \ldots$, d. h. der *Geschwindigkeit* von P in bezug auf diese Körper in dem gegebenen Augenblick.

Diese Umstände definieren den *augenblicklichen Zustand* der *Bewegung eines isolierten Punktes* und *der zukünftige Zustand hängt von dem gegenwärtigen und nicht von den früheren ab* (vgl. § 12).

Diese Hypothese der *Nichterblichkeit* entspricht dem verallgemeinerten Trägheitsgesetz. Sie schließt im besonderen in sich, daß *das Feld S durch die Bewegung von P nicht verändert wird*, wenigstens in dem folgenden Sinne: Die Gegenwart von P in S verändert das durch die Körper $A, B, C \ldots$ definierte Kraftfeld, d. h. verändert das Ergebnis von Versuchen an anderen in S festgehaltenen Punkten. Aber, *da diese Veränderung als eine augenblickliche betrachtet wird*, so braucht man sie bei der Untersuchung der Bewegung von P selbst nicht zu berücksichtigen, d. h. *die Gegenwart von P in dem Felde zu einer früheren Zeit beeinflußt nicht die Kraft, die auf P in seiner gegenwärtigen Lage wirkt.*

Lassen wir nun das verallgemeinerte Trägheitsgesetz fallen und suchen wir (unter Beibehaltung der anderen Begriffe und Prinzipien der Mechanik) die allgemeine Form einer *nichtnewtonschen Hypothese* festzustellen, die man zur Bestimmung der Bewegung an Stelle des aufgegebenen Prinzips annehmen muß.

Diese Hypothese kann eine Abhängigkeit herstellen zwischen der zukünftigen Bewegung von *P* und allen seinen vorhergehenden Zuständen, d. h. sie kann die Form einer *Erblichkeitshypothese* annehmen. Wenn man jedoch eine Darstellung der Tatsachen durch elementare Ursachen (Kap. III § 33) fordert, so muß man annehmen, daß diese Zustände durch Berührung Veränderungen hervorgerufen haben, die wir augenblicklich in dem Felde erkennen können.

In dieser Weise tritt an Stelle der *Erblichkeitshypothese* die *Hypothese des Zusammenhangs* des Feldes:

Wenn ein isolierter Punkt P sich in einem Felde S in bezug auf die unbeweglichen Körper A, B, C ... bewegt, welche als bestimmende Umstände der Bewegung gelten, so hängt seine zukünftige Bewegung ab von seiner Masse, seiner Lage, seiner gegenwärtigen Geschwindigkeit und den Kräften, welche im gegenwärtigen Augenblick durch Erforschung des Feldes bestimmt werden könnten. Diese Kräfte ihrerseits hängen jedoch nicht nur von A, B, C ... ab, sondern auch von der früheren Bewegung von P, gleich als ob P nicht isoliert wäre, sondern in einem Medium enthalten, das sich mit ihm bewegt.

Die Vorstellung dieses fiktiven Mediums, die den experimentellen Umständen widerspricht, welche in der Hypothese der *Isolierung* (der leeren Umgebung) angenommen sind, bedeutet, daß man nicht durch Abstraktion die *inneren* und *äußeren* die Bewegungserscheinung bestimmenden Umstände unterscheiden kann und drückt im Grunde die Annahme eines Zusammenhanges zwischen sämtlichen Gegenständen der Sinne aus.

Die Entwickelungen der energetischen Mechanik und diejenigen der elektromagnetischen Optik beruhen in verschiedener Weise auf einem ähnlichen Gesichtspunkt. Aber unserer Ansicht nach wird das zulässige Maß über-

schritten, wenn man die Unterscheidungen beseitigen will, die mit dem ursprünglich gegebenen Begriff der Materie (vgl. §§ 17, 19) zusammenhängen, anstatt sie als eine erste Annäherung zu betrachten, die für die Entwickelung der Erkenntnis notwendig ist und die durch fortgesetzte Ergänzungen immer weiter korrigiert werden muß.

Es ergibt sich aus der vorstehenden Kritik, daß, wenn man das verallgemeinerte Trägheitsgesetz fallen läßt, man eine nichtnewtonsche allgemeine Mechanik aufstellen kann, in der die Beobachtung der die Bewegung bestimmenden Umstände sich entweder

1. in der Zeit durch eine *Erblichkeitshypothese* oder
2. im Raume durch eine *Hypothese des Zusammenhanges* erweitert, die an Stelle der ersten gesetzt werden kann.

Die dauernden Veränderungen der elastischen Körper (die Erscheinungen der elastischen Hysteresis) haben uns die erste Hypothese nahegelegt. Die optisch-elektromagnetischen Erscheinungen haben uns den zweiten Gesichtspunkt gebracht, der geeignet ist, von der *scheinbaren Erblichkeit* Rechenschaft zu geben, die man z. B. in der magnetischen Hysteresis antrifft, da es genügt, eine Modifikation des umgebenden Äthers zu postulieren.

Es kommt nun darauf an, folgendes ausdrücklicher hervorzuheben.

Die elektrische Dynamik ist eine besondere Bestimmung der nichtnewtonschen Dynamik, die aus der Ersetzung des verallgemeinerten Trägheitsgesetzes durch die Hypothese eines Zusammenhanges des Bewegungsfeldes entsteht, wenn man dabei die *Prinzipien des Gleichgewichtes und der beginnenden Bewegung festhält.*

Wir haben nämlich (mit Wien) darauf aufmerksam gemacht, daß die Gesetze der elektrischen Dynamik diejenigen der Newtonschen angenähert wiedergeben,

und daß die Annäherung um so größer ist, je kleiner die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist, so daß die Gesetze des Gleichgewichts und der beginnenden Bewegung genau herauskommen.

Der Umstand, daß die Hypothesen der elektrischen Dynamik zu einer angenäherten Gültigkeit der NEWTONschen führen, hängt im übrigen nicht von der besonderen Bestimmung dieser Hypothesen ab.

Wenn wir nämlich die allgemeine Hypothese des Zusammenhanges des Feldes der Bewegung eines Punktes P wieder aufnehmen, so sehen wir, daß diese zur Annahme einer fortschreitenden *lokalen Veränderung des Feldes* (die von der Bewegung von P usw. abhängt) führt, welche *sich mit einer gewissen Geschwindigkeit v ausbreitet.*

Das verallgemeinerte Trägheitsgesetz entspricht der Annahme $v = \infty$, und diese Annahme kann immer dann ohne merklichen Fehler gemacht werden, wenn die Geschwindigkeit von *P gegen v hinreichend klein* ist.

Der Grad der Kleinheit kann nicht a priori festgestellt werden, da er unter anderem von dem *Bezugssystem* der Bewegung abhängt.

Das Trägheitsgesetz gilt schon mit guter Annäherung für ziemlich kleine Geschwindigkeiten in der irdischen Dynamik. Aber die Annäherung ist besser und findet auch für größere Geschwindigkeiten statt, wenn man die Bewegung auf ein System astronomisch fester Richtungen bezieht. Dies schließt in gewisser Weise den universellen Zusammenhang ein, den die NEWTONsche Dynamik schon zu berücksichtigen gezwungen war.

Aus dem Vorstehenden ziehen wir die folgenden Schlüsse: Die Entwickelungen der mechanischen Philosophie stellen den Versuch einer *Erklärung* der Physik dar, indem darin eine Verifikation der fundamentalen *Hypothesen* einer *Mechanik*, die als *allgemein und streng* betrachtet wird, erblickt wird.

Dagegen scheinen die Deduktionen und Experimente, die während zweier Jahrhunderte angestellt worden sind, eine dieser Hypothesen als ungültig zu erweisen und lassen den Gedanken aufkommen, daß die Newtonsche Mechanik durch eine nichtnewtonsche ersetzt werden müßte, in der die Gesetze des Gleichgewichts und der beginnenden Bewegung beizubehalten wären. Die neueren elektromagnetischen Theorien dürften auch die ergänzende Hypothese der neuen Dynamik bestimmen. Aber abgesehen von dieser Bestimmung *muß man festhalten, daß das verallgemeinerte Trägheitsgesetz mit um so größerer Annäherung gilt, je kleiner die Geschwindigkeit der Bewegung gegen die Lichtgeschwindigkeit ist.*

Es ist unseres Erachtens interessant zu erkennen, daß derjenige Teil der Mechanik der dauerhafteste ist, der „allen Mechaniken gemeinsam ist, die sich auf beliebige Bezugssysteme beziehen".

§ 34. Die physikalische Erklärung: der Wert der mechanischen Modelle und der Gleichungen.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen haben wir schon eine erste Art von Schlüssen gezogen, die sich auf die Verifikation der Dynamik bezogen. Wir wollen nunmehr noch andere ableiten über den *Wert der mechanischen Modelle* und den Sinn der *Erklärungen* in der Physik.

Wir müssen dazu wieder anknüpfen an das, was zu Anfang dieses Kapitels gesagt wurde.

Die Hypothese eines unsichtbaren mechanischen Substrats der physikalischen Erscheinungen kann positiv gedeutet werden als ein *Assoziations- und Abstraktionsprozeß*, der auf eine Darstellung der erscheinungsmäßigen Beziehung mit Hilfe *quantitativer Verhältnisse* zwischen gewissen Daten, d. h. mit Hilfe von *Gleichungen*, welche die Erscheinungen bestimmen, hinausläuft.

Wir haben im übrigen zwei Methoden der Erklärung unterschieden, je nachdem, ob als elementare Daten der dynamischen Erscheinung die „Verbindungen" oder die „Kräfte" betrachtet werden, wobei die einen auf die anderen zurückgeführt werden sollen. Diese beiden Methoden, die sich an die Namen von DESCARTES und NEWTON anschließen, greifen übereinander und wechseln sich im Fortschritt der Wissenschaft ab, wie wir dies darzustellen versucht haben. Sie vereinigen sich schließlich zu einer innigeren Verbindung der Sinnesdaten und zu einer Annäherung der Bilder, indem einerseits der Begriff der Verbindung erweitert wird und anderseits die Kräfte auf einen einzigen Typus, z. B. den elastischen oder den elektrischen, zurückgeführt werden.

Aber in dem Gegensatz zwischen der CARTESIschen und der NEWTONschen Tendenz läßt sich nicht nur ein Kriterium für die Wahl der ursprünglichen Bilder der optischen oder der Tastmuskelbilder erkennen, sondern auch die Neigung, den *genetisch-assoziativen* Bestandteil der Darstellung mittels Größenbeziehungen anders zu bewerten als den *aktuell-abstrakten*.

Unter diesem Gesichtspunkt erscheinen die beiden Tendenzen heute weiter als je voneinander entfernt, indem die radikalsten Behauptungen gleichermaßen aufgestellt werden, sei es, daß man behaupte, „die physikalische *Erklärung* bestehe in dem *mechanischen Modell*", sei es im Gegenteil, „sie bestehe in den die Erscheinung bestimmenden *Gleichungen, unabhängig von jedem Modell*".

Dieser Unterschied in der Auffassung der „physikalischen Erklärung" wird gewöhnlich in Verbindung gebracht mit dem Unterschied zwischen *anschaulicher* und *logischer* Veranlagung. Aber es steckt außerdem darin noch ein Unterschied in der Rolle der beiden Erklärungstypen im Hinblick auf die beiden Momente

des wissenschaftlichen Fortschritts, nämlich den eigentlich erfindenden Fortschritt, der hauptsächlich den anschaulichen Geistern zu verdanken ist und der Systematisierung der Wissenschaft, mit der sich logisch veranlagte Geister beschäftigen.

Das Wort „erklären", d. h. „begreifen", bedeutet sowohl für die einen als für die anderen, zu *gewissen Voraussagen* imstande zu sein. Aber diese bewegen sich nicht auf demselben Gebiete.

Es ist nun klar, daß die *synthetische Erklärung*, die dem höchsten Begreifen entspricht, aus einer kritischen Vereinigung der beiden Erklärungstypen hervorgehen muß, die nicht nur die Summe der verschiedenen erforderlichen Voraussagen liefert, sondern auch eine adäquate Erkenntnis der Beziehungen zwischen den verschiedenen Gebieten.

Wir wollen diese Auffassung erläutern, indem wir die beiden Ansichten über den heuristischen und den Erkenntniswert der Gleichungen und Modelle in Form von Thesis und Antithesis entwickeln.

Thesis: Die Möglichkeit für eine Gruppe von Erscheinungen *A* ein mechanisches Modell herzustellen, zieht die Möglichkeit nach sich, die meßbaren Daten dieser Erscheinung in jedem Augenblick zu bestimmen, sobald die willkürlichen Parameter festgelegt sind.

Der *Erkenntniswert* des Modells besteht also *in den Gleichungen*, welche diese Bestimmung erlauben; und diese Gleichungen ergeben sich als *gemeinsamer Teil* aus den *mannigfachen möglichen Modellen.*

Hier muß man auf einen wesentlichen Unterschied zwischen zwei Fällen achten:

1. Die Gleichungen können sich wirklich als unabhängig von jedem Modell ergeben, insofern sie die Daten selbst verknüpfen, nach deren Veränderung gefragt ist. In diesem Falle hat das Modell nur als Mittel

gedient, um *zwischen den Erscheinungen Verbindungen* herzustellen, die den *positiven Gehalt* der Theorie ausmachen. Beispiel: Die elektromagnetische Theorie von HERTZ (§ 23).

2. Anderseits können die in den Gleichungen verknüpften Größen sich nicht unmittelbar auf die Daten der Erscheinung beziehen, sondern auf die Bilder. In diesem Falle drücken die Gleichungen nicht mehr den positiven Gehalt der Theorie aus und bilden auch nicht mehr den gemeinsamen Bestandteil *aller* möglichen Modelle, sondern nur die *gemeinsamen Bedingungen einer gewissen Reihe von Modellen.* Wir haben diesen Fall in der undulatorischen Optik FRESNELS. Die Grundgleichungen ergeben sich hier mittels weniger allgemeiner Hypothesen und ohne eine besondere Bestimmung des schwingenden elastischen Mediums.[1]) Aber es bleibt immer bestehen, daß sie nicht direkt positive Beziehungen ausdrücken, da ihre Deutung an das Modell gebunden ist.

Antithesis: Ein mechanisches Modell, das sich auf eine Gruppe A von Erscheinungen bezieht, setzt die Empfindungen in der Phantasie fort und führt deshalb zu Entdeckung neuer Beziehungen:

1. zwischen den Daten von A selbst,
2. zwischen diesen und anderen Erscheinungsdaten einer weiteren Gruppe.

Daher beruht der *heuristische Wert* der zu A adäquaten mechanischen Modelle eigentlich in gewissen suggestiven Eigenschaften dieser Bilder; in der verschiedenen Extensionsmöglichkeit und allgemein in den *Unterschieden zwischen den erwähnten Modellen.*

Man vergleiche z. B. die Undulationsoptik und die elektromagnetische Optik. Das elastische Modell führt

---

1) Vgl. z. B. VOIGT „Compendium der theoretischen Physik", Bd. II, S. 554 ff.

durch Analogie mit dem Schall unmittelbarer auf die Entdeckung des DOPPLERschen Prinzips. Das elektromagnetische Modell, das für Medien, die nicht elektrisch leiten und magnetisch nicht permeabel sind, dem vorhergehenden äquivalent ist, läßt dafür neue Beziehungen zwischen leitenden und undurchsichtigen Körpern (MAXWELL) oder zwischen den Lichterscheinungen und dem Magnetfelde (LORENTZ, ZEEMANN) voraussehen.

Als Ergebnis wollen wir festhalten, daß die beiden Arten der *Erklärung* physikalischer Erscheinungen durch Gleichungen oder durch Modelle zwei verschiedenen Formen der Erkenntnis entsprechen, die einander zu ergänzen haben. Die erste enthält (wenigstens in dem typischen Fall, wo die Gleichungen einen positiven Sinn haben) sozusagen eine *abgeschlossene Gruppe von genauen Voraussagen;* die andere eine *Gruppe von* Voraussagen, die nicht mehr a pirori bestimmt, aber *der Erweiterung fähig* sind.

Wer demnach eine *physikalische Theorie* wirklich *verstehen* will, im höchsten Sinne des Wortes, muß den Prozeß in beiden Richtungen durchlaufen, d. h. er muß

1. die Assoziationen und Abstraktionen, die die Begriffe erzeugen, induktiv rekonstruieren, die Hypothesen scheiden, die in ihnen enthalten sind, und die teilweise die Zuordnung zwischen gewissen qualitativen Unterschieden und gewissen quantitativen Verhältnissen ausdrücken und teilweise diese letzteren Verhältnisse mittels der Grundgleichungen der Theorie bestimmen;
2. muß er deduktiv diese Gleichungen *deuten*, d. h. erkennen, wie sie die verschiedenen Erscheinungsdaten liefern als Funktionen einiger bestimmender Umstände, was vor allen Dingen die *Ergänzung* der quantitativen Verhältnisse durch die qualitativen *mittels Hilfshypothesen* erfordert. (Ein

einfaches Beispiel dieser Ergänzung liegt in der Grundhypothese der elektromagnetischen Optik vor. Dieselben Gleichungen werden einerseits gedeutet als elektromagnetische Schwingungen, die mit einem HERTZschen Resonator oder einem Kohärer konstatiert werden können, anderseits als Licht oder Wärmestrahlen usw., je nach der Größe jenes Elementes, das wir als eine „Wellenlänge" darstellen.)

Wer nun in den Geist eines solchen Verständnisses eingedrungen ist, für den ist es klar, daß es hauptsächlich auf eine *synthetische Betrachtung der allgemeinen Beziehungen mit Hilfe eines vereinfachten Schemas* ankommt, *wobei man von den technischen Einzelheiten der Experimente und von den Reihenentwickelungen absieht.*

Es wäre außerordentlich zu wünschen, daß diejenigen, welche Probleme der theoretischen Physik behandeln, immer bemüht wären, diese synthetische Seite der Erklärungen hervorzuheben vor und außer den Einzelheiten der Experimente und Rechnungen. Für einige hochbegabte Geister werden die allzu analytischen Abhandlungen kein Hindernis bilden, und sie werden auf jede Weise imstande sein, die Synthese daraus zu bilden. Aber vielleicht findet der Wunsch, den uns unsere Ohnmacht eingibt, bei der großen Zahl Anklang.

B. Die mechanistische Hypothese und die Lebenserscheinungen.

§ 35. Einleitung.

Die Auffassung der „mechanischen Erklärung" als „Modell" entwertet nicht die vereinheitlichende Tendenz der partiellen Darstellungen der Erscheinungen, die auf einen extensiven Fortschritt der Wissenschaft gerichtet ist.

Alle wirklichen Probleme, welche die mechanistische Philosophie aufwirft, können deshalb von neuem in ihrer neuen wissenschaftlichen Stellung geprüft werden. Und selbst wenn man den transzendenten Begriff der Allgemeinheit des Mechanismus beiseite läßt, so bleibt noch die Frage offen nach den Grenzen, die er finden *könnte*.

Nun handelt es sich, soweit die mechanische Erklärung in der Physik in Frage steht, nur darum, zu wissen, wie weit die klassischen Prinzipien der NEWTONschen Mechanik aufrechterhalten werden können; aber in einem allgemeinen Sinne muß angenommen werden, daß eine solche Erklärung möglich ist, und daß wenigstens der Geist des mechanischen Determinismus aufrechterhalten werden kann, d. h. daß man die Daten der physikalischen Wirklichkeit in der Zukunft als Gegenstände möglicher Voraussagen betrachtet, die auf quantitativen Beziehungen beruhen, welche durch einige charakteristische Umstände der Gegenwart oder Vergangenheit bestimmt sind.

Wenn man jedoch versucht, diese Betrachtungen fortzusetzen und die mechanische Erklärung auf die Lebenserscheinungen auszudehnen, so muß man vorher einige Probleme diskutieren, die wir kurz streifen wollen.

Wir wollen zuerst von der *Möglichkeit* einer solchen Erklärung handeln und dann von ihrem *Wert* oder von der wissenschaftlichen *Nützlichkeit*, die sich daraus ergeben kann.

Die Frage nach der Möglichkeit, für die Lebenserscheinungen ein mechanisches Modell (im weitesten Sinne) zu liefern, führt uns zu Folgendem:

1. das Feld zu reinigen von einigen leeren *Einwänden, die im voraus gemacht werden;*
2. zu einer Prüfung der mit dem *biologischen Determinismus* verknüpften Fragen und besonders des Gegensatzes zwischen

a) dem *psychologischen Determinismus* und *dem freien Willen*,
b) der *physikalischen* und der *teleologischen Erklärung;*

3. zu untersuchen, ob in den Lebenserscheinungen die *allgemeinen Prinzipien der Physik verifiziert* sind, die aus der Annahme eines Mechanismus folgen.

Gegen die Annahme eines Mechanismus in der Biologie werden als Gründe vor allem einige Phrasen ins Feld geführt, deren Leerheit gezeigt werden muß.

Man stellt z. B. die *Selbsttätigkeit*, die *Veränderlichkeit* alles Lebendigen der *Trägheit* und *Unveränderlichkeit* der *Materie* gegenüber; und aus dem Gegensatz der so hervorgerufenen Vorstellungsbilder glaubt man einen unlösbaren Widerspruch ziehen zu können.

§ 36. Im voraus zu machende Einwände.

Wenn nun die „Selbsttätigkeit" hier als „Aktivität" oder „Möglichkeit einer Veränderung durch innere Ursachen" aufgefaßt wird, so muß man sagen, daß die Vorstellung einer gänzlich passiven Materie durchaus nicht dem Begriffe entspricht, auf den die verschiedenen physikalischen Beziehungen führen, in denen sich die Materie immer als ein Komplex von Energien erweist. In diesem Sinne erscheint die Ansicht angemessener, daß alles um uns herum lebt und tätig ist, und daß nur ein Unterschied im Grade, d. h. in der Intensität oder der Geschwindigkeit der Veränderung und in der relativen Bedeutung der *inneren und äußeren Faktoren* für den Ablauf der Erscheinungen stattfindet.

Aber die oben erwähnten Einwände und andere ähnliche beruhen offenbar auf Gründen des *Gefühls.*

Das Leben ist uns nicht nur als Gegenstand der Vorstellung gegeben, die Voraussagen, die sich daran

knüpfen, erregen in unserem Geiste Furcht und Hoffnung und entsprechen gewollten oder nicht gewollten Zielen.

Nun ist die mechanistische Hypothese außerstande, die Gefühle zu *erklären*, die sich an die Vorstellung des Lebendigen knüpfen, oder dem Willen eine Norm vorzuschreiben. Schlimmer noch, diese Hypothese scheint den erwähnten Gefühlen durch eine deterministische Betrachtung der psychologischen Tatsachen, die wir weiterhin prüfen werden, zu widersprechen.

Welche Bedeutung haben diese Gefühlsgründe?

Wir antworten ohne Erregung: gar keine. Aber wir halten es für nützlich, diese Antwort zu rechtfertigen.

Zwischen dem Wissen einerseits, dem Fühlen und Wollen anderseits besteht folgende Beziehung: Das Wissen ist unabhängig vom Gefühl und Willen, da es eine hypothetische Beziehung zwischen dem Willen und der darauf folgenden Wahrnehmung einschließt (Kap. II). Das Gefühl und der Wille sind ihrerseits vom Wissen unabhängig; die Wissenschaft hat keinen Einfluß auf die Gemütsbewegungen, welche die erkannten Gegenstände begleiten. Sie kann dem Willen keine Regeln vorschreiben, es sei denn in hypothetischer Weise, d. h. wenn es sich um Mittel handelt oder um Ziele, deren Grundsatz zu anderen höheren und stärker gewollten Zielen erkannt wird.

Wer nun diese Beziehung klar erkannt hat, für den ist es sinnlos, von einer wissenschaftlichen Theorie eine Erklärung der Gefühle zu verlangen oder zu behaupten, daß die Bilder, die als Mittel dieser Voraussage benutzt werden, jene selben Gefühle erwecken sollen, welche die vorgestellten Tatsachen begleiten.

Demnach fällt jener auf einem Vorurteil beruhende Einwand gegen die Möglichkeit einer mechanistischen

Erklärung der Lebenserscheinung. Diese Hypothese entspricht einem *kontemplativen* Geisteszustande, in dem es auf Voraussagen ankommt, und in dem man von Gefühlen abstrahiert, durch welche die geforderten Voraussagen einen *Wert* erhalten würden für einen anderen *(tätigen)* Geisteszustand.

§ 37. Der biologische Determinismus.

Ist aber die Voraussage möglich? oder steht ihr die „Selbsttätigkeit" des Lebendigen entgegen?

Dies ist ein positives Problem, das aus den oben dargestellten Unterschieden sich ergibt. Es ist das Problem des *biologischen Determinismus.*

Der Sinn dieses Determinismus besteht in der Annahme, daß die Tatsachen des Lebens *bestimmten Voraussagen* unterworfen werden können, nach der Ordnung der Koexistenz und der kausalen Abfolge, und daß sie deshalb Gegenstand einer wissenschaftlichen unbegrenzt fortschreitenden Erkenntnis sein können.

Nun kann das deterministische Prinzip nicht a priori bewiesen werden. Es drückt eine allgemeine Voraussetzung aus, die sich in den verschiedenen Gebieten des Wissens in gleicher Weise durch den Erfolg der aufgestellten Voraussagen, d. h. durch den Fortschritt der Wissenschaft rechtfertigt.

Aber zwischen den Lebenserscheinungen und den physikalischen besteht in dieser Beziehung kein Unterschied, der sich nicht erklären ließe durch die komplizierten Bedingungen der physiologischen Tatsachen, sei es, daß es sich um lebende Wesen oder auch einfach um ihre Organe oder Gewebe handelt.

Der scheinbare Widerspruch verschiedener Erscheinungen, die unter merklich *gleichen* Umständen eintreten, löst sich auf bei einer genaueren Unterscheidung derselben.

Hierfür finden sich schöne Beispiele, geprüft und diskutiert bei CLAUDE BERNARD in seiner „Introduction à la médecine expérimentale", denen man heute viele andere hinzufügen könnte, die die neuesten Fortschritte der biologischen Wissenschaften geliefert haben.

Wir wollen nur ein höchst lehrreiches anführen, indem wir uns auf das Ergebnis der *Malaria*-Forschungen beziehen (LAVERAN, MARCHIAFAVA, GOLGI, ROSS, GRASSI, DIONISI, BIGNAMI E BASTIANELLI). Dieses verspricht viel für die zukünftigen Erfolge der Ätiologie der Krankheiten, die jene unbestimmte Dunkelheit der Erklärungen verlassen wird, durch die sich MOLIÈRES Arzt berühmt gemacht hat.

§ 38. Der psychologische Determinismus und die Willensfreiheit.

In Wahrheit wäre aber der biologische Determinismus von niemandem ernstlich bestritten, wenn nicht aus seiner Annahme im weitesten Sinne als allgemeine Voraussetzung folgte, daß auch die psychologischen Erscheinungen und im besonderen unser Denken und Wollen gleichfalls einer kausalen Bestimmtheit unterworfen sind.

Ein Gefühl des Widerstrebens verbindet sich mit dieser Ansicht; ein Gefühl, das allerdings nachlassen würde, wenn wir unsere eigene Person in der erkannten Welt isolieren könnten, und das vollkommen verschwinden würde, wenn es möglich wäre, den Menschen und die höheren Tiere von der Folgerung auszuschließen und sie nur auf die niederen Lebewesen der zoologischen Stufenleiter zu beschränken, die so weit von uns entfernt sind.

Dagegen verbietet uns eine reifere wissenschaftliche Überlegung so willkürlich das zu trennen, was durch eine zusammenhängende Reihe verbunden erscheint. So

bleibt unser Schicksal geknüpft an das der Infusorien und Amöben. Weil man stufenweise von den tiefsten Lebensformen zu den höheren aufsteigen kann, weil auch die Erscheinungen der Intelligenz von den Tieren zum Menschen sich in unmerklichem Übergange entwickeln, und weil sie sowohl als Ursache wie als Wirkung einen Teil des Lebens ausmachen, so muß man sich zu einer endgültigen Wahl entschließen. Entweder muß man den biologischen und psychologischen Determinismus in voller Allgemeinheit zugeben, oder man muß ihn leugnen und den Gedanken der *Selbsttätigkeit* annehmen in einem Sinne, der in diesem Gebiete die *Möglichkeit der Voraussage* ausschließt oder a priori einschränkt.

Um die Schwierigkeit zu beseitigen, muß man vor allem das sogenannte *Problem der Willensfreiheit* untersuchen, indem man in ihm die *wissenschaftliche* Frage, welche den psychologischen Determinismus der menschlichen Handlungen betrifft, von der *moralischen* Frage trennt, die sich auf das Werturteil darüber bezieht.[1]) Die Übertragung dieser letzten Art von Gründen auf das wissenschaftliche Gebiet ist ein unerlaubter Übergriff, von dem man sich befreien muß, wenn man eine reine wissenschaftliche Ansicht gewinnen will.

Aber wenn dies zugegeben ist und man nur die Tatsache des fremden Willens betrachtet, so verschwindet alle Dunkelheit.

Die Frage, „ob der Wille durch das, was ihm vorausgeht, *bestimmt* wird", bedeutet, positiv verstanden, nur das, „ob man die Entschließungen anderer *voraussehen* kann, wenn man genau weiß, was vorher in dem Entschließenden vorgeht". Sofern man nun unter diese

---

1) Über die Beziehungen dieser Frage zu den neueren *Strafrechtstheorien* s. MARIO CALDERONI „I postulati della scienza positiva e il diritto penale". Florenz, RAMELLA 1901.

vorausgehenden Tatsachen auch die Gefühle und den Willen der Person rechnet, von der die Rede ist, so ist die bejahende Antwort nicht zweifelhaft.

Direkte Beobachtungen stützen die deterministische Behauptung, abgesehen von den allgemeinen Gründen, welche den physiologischen Determinismus bestätigen. Und dies geschieht mit um so größerer Sicherheit, je mehr die Fehlerquellen ausgeschaltet werden, die von der unvollkommenen Kenntnis der Motive herrühren, welche in dem Geiste anderer wirken und von der Kompliziertheit der Tatsachen, die durch sehr kleine Veränderungen dieser Motive verändert werden.

Zu der Anschauung von der *Vernünftigkeit* der menschlichen Handlungen (d. h. von ihrer Abhängigkeit von Motiven), die aus den vorstehenden Beobachtungen folgt, kommen andere objektive Daten, z. B. die *statistische Regelmäßigkeit* des sozialen Geschehens, die so schön von Quetelet beleuchtet worden ist, usw.

Aber man braucht sich bei diesen Gründen nicht aufzuhalten; sie genügen jedenfalls für denjenigen, der aus seinem Geiste jedes Vorurteil moralischer Art verbannt hat, um in ihrer Gesamtheit einen *induktiven Beweis* des psychologischen Determinismus abzugeben oder, wenn man lieber will, auch in diesem Gebiete das Vertrauen in die Möglichkeit einer Wissenschaft zu rechtfertigen, die sich nicht unterscheidet von derjenigen, welche sich auf alle die andersartigen Erscheinungen bezieht, die wir als unveränderliche Beziehungen der Koexistenz und der Aufeinanderfolge begreifen.

Wenn der psychologische Determinismus Schwierigkeiten bereitet, so beruhen diese nicht auf Gründen wissenschaftlicher Art.

Woher also das Widerstreben, ihn anzunehmen?

Die Antwort ist klar: weil die deterministische Behauptung der unmittelbaren Gewißheit zu wider-

sprechen scheint, die jedermann von der *Freiheit seines eigenen Willens* hat, und weil auf diesem Begriff der „Freiheit" die leitenden Gedanken beruhen, die unseren moralischen Werturteilen zugrunde liegen.

Man muß deshalb zeigen, daß, wenn die erwähnte Anschauung der Willenstatsachen richtig gedeutet wird, *Freiheit und Determinismus einander nicht widersprechen.*

Die Behauptung der Willensfreiheit besagt nach dem Zeugnis unseres Bewußtseins folgendes:

1. daß jedermann innerhalb gewisser Grenzen die Möglichkeit hat, das zu *tun*, wozu er sich entschlossen hat *(physikalische* oder *äußere Freiheit)*,
2. daß jeder die Möglichkeit hat, bis zu einem gewissen Grade den Ablauf seiner Gedanken und Gefühle zu beeinflussen und demnach seine künftigen Entschließungen zu bestimmen oder zu modifizieren, indem er die Wirkung der Motive verhindert oder verstärkt. Diese „Freiheit zu *wollen*", die der Freiheit zu tun, entgegengesetzt ist, bildet die sog. *moralische* oder *innere Freiheit.*

Sie hat, wie die erste, reale Existenz. Aus ihr entnehmen wir unser Selbstvertrauen. Sie bildet die wahre Grundlage unserer *Verantwortlichkeit*, weshalb wir den höchsten Grad von Verantwortlichkeit für diejenigen Handlungen in Anspruch nehmen, die mit Vorbedacht gewollt waren als Folgen einer reiflichen Überlegung, der wir eine Reihe von Handlungen unterworfen hatten, und die deshalb mit den *dauernden Eigenschaften* unserer *Persönlichkeit* zusammenhängt. Wir glauben dagegen weniger verantwortlich zu sein für die Handlungen, die unvorhergesehen waren, wobei wir uns immerhin dafür verantwortlich machen, uns nicht gegen das Motiv, das über uns kam *(Versuchung)*, gewappnet zu haben, indem wir es verhinderten, auf unseren Willen Einfluß zu gewinnen, so daß diese Verantwortlichkeit in unseren

Augen fast verschwindet, wenn die Handlung durch ein starkes und unerwartetes Motiv veranlaßt war.

Dies alles stimmt vollkommen überein mit dem gesunden Menschenverstande und ist, wie gesagt, notwendig für das praktische Leben, das das Vertrauen in unserem eigenen Willen erfordert.

Aber in alledem liegt nichts, was der deterministischen Behauptung von der Möglichkeit die Willenstatsachen vorauszusehen widerspräche. Scheinbare Widersprüche entstehen nur aus einem fehlerhaften Schluß, der mit Transzendentalismus behaftet ist.

In zweierlei Weise kommt hier etwas Transzendentes herein.

In erster Reihe durch Anwendung eines alten Arguments von Locke und Leibniz auf die Willensfreiheit, das ursprünglich eine andere Bedeutung hatte.

Wenn man das Vorhandensein einer zweiten Willensstufe, die in dem „Willen zu wollen" besteht, zugibt, so muß man auch eine dritte, eine vierte usw. bis ins Unendliche zugeben.

Aus dieser Unendlichkeit ergibt sich für einige ein transzendenter Begriff des Willens, der *sich selbst bestimmt*, daher das *arbitrium indifferentiae*, auf Grund dessen die Voraussage unmöglich wird. Aber das Argument beruht auf einem Mißverständnis.

Wenn man sagt, daß wir einen „Willen zu wollen" haben, so ist der Wille, als Subjekt genommen, nicht derselbe, der das Objekt der Willensregung bildet. Die Willensstufe zweiter Ordnung schließt demnach nicht das Nonsens eines *sich selbst* bestimmenden Willens ein, sondern die psychologische Tatsache, daß ein Willensakt von einem anderen, ihm voraufgehenden, veranlaßt sein kann. Nun kann offenbar diese Abhängigkeit (die übrigens teilweise äußeren Bedingungen unterworfen ist) nicht über eine endliche Anzahl von Stufen hinausgehen,

da die Zeit, die der Willensakt erfordert, eine endliche ist. Wir brauchen uns deshalb nicht auf eine Diskussion jenes dialektischen Hilfsmittels einzulassen (das der natürlichen Teleologie entliehen ist) und hervorzuheben, daß man nicht ohne Widerspruch aus einer *unendlichen* Reihe von Ursachen auf eine *erste* Ursache schließen kann, die eine *Ursache ihrer selbst* ist.

Eine andere Art zu argumentieren, die anscheinend tiefer geht, führt einen fehlerhaften Begriff der menschlichen *Persönlichkeit* ein. Der Satz „Ich kann tun und wollen, was mir beliebt, auch im Gegensatz zu den Motiven, welche auf meine Entschließungen wirken"[1]) drückt eine Vorstellung der Person aus, die außerhalb der Reihe ihrer Willensregungen wirkt.

Wenn man nun einem solchen Satze einen verständlichen Sinn beilegen will, so kann man ihn nur in einer Weise auslegen. Das Ich, dem zu handeln und zu wollen beliebt, ist nichts anderes als der kontinuierliche Ausdruck des Willens selbst, der den im voraus als beständig erwiesenen Motiven die vorübergehenden und zufälligen unterordnet.

Die *moralische Persönlichkeit* eines Menschen ist geradezu identisch mit diesem kontinuierlichen Willen, der das Ergebnis organischer Faktoren und von der äußeren Umgebung aufgenommener Bestandteile ist. An dieser Behauptung entsteht kein Zweifel, wenn wir fremde Personen betrachten. Wenn wir uns dagegen auf uns selbst beziehen, so täuscht uns leicht die Verdoppelung, die wir an dem Ich vornehmen, indem wir es einmal als Subjekt und einmal als Objekt betrachten, d. h. indem wir uns als Subjekt der Handlungen verwechseln mit der Vorstellung, die wir von uns selbst haben.

---

1) Vgl. den lebhaften Streit, den A. HERZEN beschreibt in „Le cerveau et l'activité cérébrale". Paris, F. B. Baillière, 1887.

Betrachtet man einmal unser Ich als Objekt einer Vorstellung, so überzeugt man sich leicht, daß man ihm keinen anderen Inhalt beilegen kann als die kollektive Idee von dem, was in unseren Willensregungen verhältnismäßig beständig ist.

Wenn man daher dieser als *scheinbar* und *relativ* angesehenen Wirklichkeit eine *absolute Substanz* oder *Seele* entgegensetzt, die man zum Träger der *ethischen Persönlichkeit* macht, so verfällt man in einen jener unendlichen Definitionsprozesse, deren Leerheit bereits bewiesen wurde.

Unglücklicherweise beherrscht diese transzendentale Ansicht von der Seele bis auf unsere Tage den Streit um die Willensfreiheit, dessen Geschichte anknüpft an die des religiösen Problems der Prädestination und der Gnade.

Diese Ansicht der Frage beherrscht noch das Denken LEIBNIZens in der „Theodicee".

Daher mußte der Philosoph, obgleich er dem spinozistischen äußeren Fatalismus eine klare Ansicht des inneren psychologischen Determinismus entgegensetzte, dem Begriff der *Freiheit*, die er als *Selbsttätigkeit des vernünftigen Wesens* betrachtete, einen transzendentalen metaphysischen Sinn beilegen.

Dieser Sinn tritt mit großer Klarheit in der weiteren Entwickelung auf, die der Determinismus in der KANTischen Philosophie erhalten hat. Determinismus in der Erscheinungswelt entgegengesetzt der Autonomie des Noumenon, d. h. Freiheit des Willens an sich, sofern man die intelligible Ursache des Wollens (?!) betrachtet; aber Bestimmtheit nach unveränderten Gesetzen in seinen Manifestationen. Die natürliche Weiterentwickelung dieser Unterscheidung führt schließlich zur Lehre SCHOPENHAUERS: der Wille, transzendental verstanden, als außerhalb seiner Akte, außerhalb von Raum und Zeit,

nimmt die Stelle der *Substanz* oder *des Dinges an sich* ein, eine Idee, deren anthropomorphe Grundlage wir bereits aufgewiesen haben.

Diese Endergebnisse der klassischen Philosophie sind unseres Erachtens sehr lehrreich; denn einerseits ergibt sich daraus die Erkenntnis des psychologischen Determinismus in seinem menschlichen und positiven Sinne, anderseits der Beweis, daß das Problem der Willensfreiheit die praktische Vernunft nur insofern interessiert, als sie als notwendige transzendente Grundlage der Moral betrachtet wird.

Aber wenn man die transzendentale Vorstellung eines Willens und einer ethischen Persönlichkeit jenseits ihrer Manifestationen als sinnlos verwirft, so ergibt sich klar, daß die Behauptung des freien Willens dem Determinismus nicht widerspricht.

Beide behalten auf ihrem Gebiete ihre volle Bedeutung. Die Möglichkeit einer unbegrenzten Ausdehnung der psychologischen Wissenschaft beseitigt nicht die *Bewertung* der menschlichen Handlungen, sofern sie *gewollt* oder *nicht gewollt* sind im Hinblick auf gegebene *Zwecke*.

Allerdings konnte die deterministische Behauptung infolge einer irrtümlichen Deutung auf einige schwache Willenskräfte einen entmutigenden Einfluß ausüben. Stuart Mill hat selbst diese Wirkung erfahren und bezeugt an einer bedeutsamen Stelle seiner Autobiographie, daß er sich davon befreit hat: „Als ich die Theorie zum erstenmal in ihrem wahren Sinne begriff, erschien sie mir nicht mehr entmutigend und abgesehen von der Erhebung, die mein Geist dadurch erfuhr, hörte ich auf, unter der so schweren Last zu seufzen, die derjenige zu tragen hat, der in der Absicht, die Meinungen anderer zu reformieren, erkennt, daß die eine Lehre wahr und die entgegengesetzte moralisch wohltätig ist.“

Aber derartigen Wirkungen einer irrtümlichen Deutung kann man die Vorteile entgegensetzen, die ein starker Wille aus der wohlverstandenen deterministischen Lehre ziehen kann. Denn die genaue Kenntnis des relativen Gewichtes der Motive, die uns zu unseren Entschlüssen treiben, die angemessene Bewertung der Art, in der wir imstande sind, auf die Reize zu reagieren oder ihre Wirkungen zu verhindern, lehren uns, unseren Willen zu stärken und den Triumph unserer beständigen Persönlichkeit über die wandelbaren äußeren Reize herbeizuführen.

§ 39. **Der Physizismus.**

Nachdem wir das Feld von den psychologisch-moralischen Schwierigkeiten gereinigt haben, wollen wir zu der wissenschaftlichen Betrachtung der Lebenserscheinungen zurückkehren.

Der Determinismus im allgemeinen schließt die weiteste Möglichkeit ein, aus der Reihe dieser Erscheinungen unveränderliche Beziehungen der Koexistenz und der Aufeinanderfolge herauszuheben. Die mechanistische Hypothese schränkt diesen Gedanken ein, indem sie vorschreibt, als bestimmende Umstände diejenigen auszuwählen, welche unabhängig vom Leben eine *physikalische* Bedeutung haben.

Diese besondere Art von biologischem Determinismus erhält den Namen *Physizismus.* Sie kann genauer durch die folgenden Forderungen ausgedrückt werden:

1. Die *biologische Erklärung* soll die vorgelegte Erscheinung darstellen als Folge oder als unveränderlich verknüpft mit physikalisch-chemischen Daten (Wärme, Elektrizität, Bewegung usw.), die nach gewissen quantitativen Verhältnissen zusammenwirken.
2. Das Zusammenwirken dieser physikalisch-chemischen Erscheinungen muß zu einem Zustande führen,

in dem ein analoges Phänomen auch *außerhalb des Lebens* bestimmt wird.

Und wenn der *Physizismus* nicht sowohl als ein weit entferntes Ziel betrachtet wird, als vielmehr in seiner praktischen Wirkung auf den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft, so kommen noch folgende stillschweigend gemachte Hypothesen hinzu:

3. Durch die Analyse der physikalischen Ursachen der Lebenserscheinungen können diese auf eine nicht zu große Zahl von Bestandteilen zurückgeführt werden.
4. Die wesentlichen Bedingungen, die bei der physikalischen Kausalität zu berücksichtigen sind, werden nicht verändert, wenn man dieselben Erscheinungen im Zusammenhange des Lebens betrachtet.

Dieser letzten Ansicht nun widersprechen die Ergebnisse einer fünfzigjährigen Forschung. Sie erschüttern daher den Physizismus in dem praktischen Sinn, wie er durch die vorstehenden Forderungen definiert wird, unabhängig von dem Glauben an einen weit entfernten Fortschritt.

Es ergibt sich nämlich, daß *man die biologische Physik nicht behandeln kann, indem man von der wesentlichen Bedingung des Lebens abstrahiert.*

Nur wenige allgemeine physikalische Beziehungen, die die Mannigfaltigkeit der Bedingungen beherrschen, finden sich ohne Änderung in dem biologischen Gebiete verifiziert, so z. B. die Erhaltung der Materie oder der Energie. Aber bei den weniger allgemeinen Gesetzen, die sich auf die Diffusion oder die Osmose oder die elektrische Leitfähigkeit usw. beziehen, begegnet man auf Schritt und Tritt Ausnahmen und scheinbaren Widersprüchen.

Da ist z. B. eine *Zitterroche,* eine lebende Leidener Flasche, deren elektrische Ladung sich unter para-

doxen Umständen erhält. Während das Funktionieren der elektrischen Maschinen so leicht durch die Feuchtigkeit des Isolators verhindert wird, sehen wir hier eine Ladung, die sich in dem umgebenden Wasser, von dem doch die Gewebe des Tieres durchtränkt sind, nicht verliert!

Man könnte die Bedeutung dieser gesicherten Tatsachen nicht leugnen oder vermindern, selbst wenn es sich um seltene Ausnahmen handelte; aber wir müssen sie um so mehr berücksichtigen bei ihrer großen Zahl und ihrem häufigen Vorkommen, und angesichts des Umstandes, daß es sich um Abweichungen handelt, die schon auf den untersten Stufen des Lebens auftreten. Die allgemeine Physiologie der Zelle, wie sie uns Max Verworn in seinem vorzüglichen Lehrbuche darstellt, und die Physik der Gewebe bieten dafür vielfältige und charakteristische Beispiele.

Wir erwähnen nur ein einziges. Die lebenden Zellen der Blase verhindern die Diffusion des Wassers und dennoch findet sich keine undurchlässige Membran, die das Hindernis erklärte. Man muß sagen, daß ein feuchtes Gewebe sich dem Durchgang des Wassers *kraft seines Lebens* entgegenstellt, da es diese Eigenschaft in dem Augenblick verliert, in welchem der Tod eintritt.

Derartige Erscheinungen können immer mit einem theoretischen Physizismus in Einklang gebracht werden, wenn man eine Superposition von Beziehungen annimmt, die zu kompliziert sind, um in ihre hypothetischen, physikalischen Bestandteile zerlegt zu werden. Aber sie legen eine positive Gedankenrichtung nahe, die wenigstens vorläufig auf eine *analytische Erklärung* verzichtet und eine *synthetische* versucht, in der die *Tatsache des Lebens* als Grundbedingung angenommen wird, um dadurch das mittlere Resultat der superponierten elementaren Umstände auszudrücken.

Anstatt also ausschließlich physikalische Daten auszuwählen, wird man alle bekannten Umstände in Betracht ziehen, die sich als mit dem Leben verknüpft erweisen, ohne nach ihrer weiteren Reduktion zu fragen und, anstatt den physikalischen Determinismus in den lebenden Medien a priori willkürlich zu vereinfachen, wird man versuchen, die charakteristischen Unterschiede zu erkennen, die in ihrer Gesamtheit eine *positive Definition des Lebens* zu liefern geeignet sind.

Diesem Zwecke dienen unter anderem einige schöne Untersuchungen unseres Landsmannes G. Galeotti, aus denen hervorgeht, daß das lebende Plasma die Diffusionen gewisser Stoffe verhindert, daß es im allgemeinen die Herstellung des osmotischen Gleichgewichtes verbietet und in einigen Fällen den durch elektromotorische Kräfte bewegten Ionen einen besonderen Widerstand entgegensetzt.

§ 40. Die teleologische Erklärung.

Im vorstehenden haben wir vor allem die physikalischen Erscheinungen betrachtet, die sich in einem lebenden Medium vollziehen. Die Notwendigkeit einer synthetischen Erklärung geht noch deutlicher hervor aus den eigentlich physiologischen Erscheinungen. Unsere Kritik zeigt, daß eine solche Erklärungsart der mechanistischen Hypothese und dem theoretischen Physizismus, der aus ihr folgt, nicht widerspricht, wenn sie auch dem letzteren als Gesichtspunkt für die gegenwärtige Forschung jede praktische Bedeutung nimmt.

Aber es handelt sich jetzt darum, zu erkennen, ob der theoretische Physizismus nicht wenigstens der in der Physiologie üblichen Erklärungsart eine Schranke auferlegt, und ob er nicht im besonderen jede *teleologische Erklärung* als sinnlos erscheinen läßt.

Stellen wir vor allem die Tatsache fest, aus der sich das Problem ergibt.

Der größte Teil der physiologischen Erkenntnisse hat eine Form, die die Umkehrung von derjenigen ist, in der wir uns den Zusammenhang von Ursache und Wirkung vorstellen. Diesem Umstande begegnet man so ziemlich bei jeder Art von Lebenserscheinungen, und zwar nicht nur bei dem synthetischen Studium des Lebewesens, sondern auch in der Physiologie der Gewebe.

Wenn man z. B. verstehen will, welche Substanzen es sind, deren Diffusion durch ein Gewebe verhindert wird, so greift man zu dem Gedanken eines *Nutzens* oder eines *Bedürfnisses* für das Plasma, eher in dem einen als in dem anderen Sinne zu reagieren, als ob die frühere Erscheinung durch spätere bestimmt sein könnte, anstatt umgekehrt. Dieser selbe Gedanke liegt auch schon in dem sog. *Gesetz der Zellreaktion*, welches den *Zweckbegriff* einer jeden *Erklärung* in der Wissenschaft vom Leben zugrunde zu legen scheint.

Aber eine derartige Erklärungsart erregt heftiges Widerstreben bei denjenigen, welche sich die physikalischen Wissenschaften zum Vorbilde nehmen. Es scheint auf den ersten Blick, als ob zwischen dem teleologischen Gesichtspunkt und dem auch nur theoretisch verstandenen Physizismus ein unlösbarer Widerspruch bestände, und die Physizisten folgern daraus, daß jede teleologische Erklärung als sinnlos zu beseitigen sei.

Wir werden bald untersuchen, ob der erwähnte Widerspruch beseitigt werden kann. Zunächst wollen wir jedoch bemerken, daß man sich in der Praxis gar nicht an eine so einfache Regel halten könnte.

Diejenigen nämlich, die sie befolgen, sind nicht imstande, die zahlreichen Unterscheidungen von Fällen ohne anscheinende Verbindung, zu denen der Physiologe gelangt, indem er gewisse Unterschiede *in bezug auf die*

Zwecke des Lebens betrachtet, durch etwas anderes zu ersetzen.

Die Physizisten werden erwidern, daß es sich hier um *Worterklärungen ohne Sinn* und *ohne Wert* handelt, ein Schleier, der über unsere Unkenntnis geworfen wird, und den man ohne Bedauern fortnehmen kann, auch wenn man nichts anderes an seine Stelle setzt.

Dies wäre allerdings der Fall, wenn die teleologische Ausdrucksweise im Sinne eines mystischen Vitalismus zu verstehen wäre, in dem der vorstellende Gesichtspunkt der Erkenntnis mit dem aktiven des Willens verwechselt wird.

Aber man kann in ihnen eine positive Bedeutung finden, und deshalb müssen wir unter diesem Gesichtspunkt der Kritik der Physizisten widersprechen.

Es ist nicht wahr, daß der Nutzen oder Schaden eines Lebewesens sinnlose Ausdrücke sind: denn sie schließen eine Tatsache ein, die experimentell erkannt werden kann.

Es ist nicht wahr, daß die Erklärungen, in denen von dem Gedanken Gebrauch gemacht wird, daß etwas einem Zwecke des Lebens entspricht, wertlos sind; denn durch Vergleichung ähnlicher bestimmender Umstände erhält man in den verschiedenen Erscheinungsgruppen *bedeutsame Voraussagen.*

Auf Grund dieser Tatsachen erhält sich diese teleologische Erklärung in den Wissenschaften vom Leben trotz alles Widerstrebens.

Es bleibt nur übrig, sie angemessen zu deuten und zu zeigen, daß sie nicht mehr in einem unauflösbaren Widerspruch mit dem Geiste des mechanischen Determinismus stehen.

Wir wollen zwei Erklärungstypen unterscheiden, in denen der Zweckgedanke in verschiedener Weise auftritt:

1. Die psychologische Erklärung, in der ein gewisser Zweck als Bestimmungsgrund für die willkürliche Handlung eines Lebewesens betrachtet wird.
2. Die eigentlich biologische Erklärung, bei der der Bau eines Organs in bezug auf die Funktionen, die es ausüben soll, betrachtet wird oder im allgemeinen, wo man gewisse biologische Eigenschaften oder gewisse Reaktionen des Plasmas usw., als gewissen Nützlichkeiten entsprechend, darzustellen sucht.

Der erste Fall läßt sich sofort mit dem üblichen Determinismus in Einklang bringen, da wir als Ursache der Handlung nicht eigentlich den vorgesetzten Zweck betrachten, sondern vielmehr seine Vorstellung, die aus der Erinnerung und aus der Assoziation früherer Wahrnehmungen entsteht.

Der zweite Fall läßt sich schwer auf den ersten zurückführen, es sei denn, daß man seine Zuflucht zu der Hypothese einer Vorsehung nimmt, welche die gegenwärtige Wirklichkeit nach zukünftigen Zwecken bestimmt, so wie wir selbst eine Maschine bauen, die imstande ist, gewisse Arbeiten zu verrichten.

Wenn man nun von dem moralischen oder religiösen Werte einer derartigen Hypothese absieht und sie nur vom Standpunkt der Erkenntnis beurteilt, so muß man zugeben, daß sie keinerlei wissenschaftlichen Wert hat, da sie uns nicht zu Voraussagen verhilft oder Voraussagen liefert, die sich sowohl als wahr wie als falsch erweisen, ohne uns ein Kriterium für eine mögliche Auswahl zu liefern.

Es bleibt zu untersuchen, ob die biologischen Erklärungen der zweiten Art mit dem Determinismus in Einklang gebracht werden können, unabhängig von der Annahme des Dazwischentretens einer Vorsehung.

Die Übereinstimmung ist wirklich möglich, wenn man die teleologische Erklärung in einem positiven

Sinne deutet, als Ausdruck einer *ersten Stufe der Erkenntnis.*

Anstatt diese Erklärung mit derjenigen zu vergleichen, die man auf der höchsten Entwickelungsstufe der Physik anstrebt, wo man von bekannten Ursachen zu unbekannten Wirkungen fortschreitet, wollen wir sie derjenigen Erklärung vergleichen, die in der Physik selbst ihre Stelle findet als erste Stufe der induktiven Untersuchung, wenn es sich darum handelt, aus den vorläufigen Beobachtungen Hypothesen zu bilden, d. h. wenn man von der bekannten Wirkung zu den Ursachen aufsteigen will.

Auch die physikalischen Probleme können in diesem Sinne teleologisch betrachtet werden. Es genügt, einige Beispiele aus der Mechanik und der Astronomie heranzuziehen.

Man kann in mannigfacher Weise mechanische Systeme ausdenken, die sich in einem gewissen Zustand des stabilen Gleichgewichts befinden; jede kleine Bewegung, die durch irgendeine Störung hervorgerufen wird, erzeugt Kräfte, welche das System in seine Anfangslage zurückführen. Wenn in derartigen Fällen die Stabilität als eine zu erfüllende Bedingung gegeben ist, so besteht das Problem, die Kräfte zu suchen, welche ihr Stattfinden erklären.

In einem allgemeineren Sinne besitzt auch das Planetensystem eine Stabilität, die innerhalb der Grenzen der Beobachtung praktisch verifiziert ist, und die sich den Astronomen als ein zu lösendes Problem darbot.

Und das Problem wurde gelöst, nicht von Newton, nach dessen Meinung die gegenseitigen Anziehungen der Planeten den stationären Zustand des Systems stören müßten, sondern von Laplace, der erkannte, daß die Wirkung der Störungen auf die Bahnelemente sich periodisch kompensiert, abgesehen von einer kleinen

säkularen Veränderung. Dadurch wurde die erhabene Harmonie des Gesetzes wiederhergestellt, welche sein Entdecker durch die Hypothese einer dazwischentretenden Vorsehung gestört hatte.

Eine andere ähnliche Frage ist die Stabilität des Saturnringes. Sie bildet eine Tatsache, welche wir uns als Ergebnis unbekannter Ursachen vorstellen können, um deren Auffindung es sich handelt. Wenn man nun die einfachste Hypothese macht, daß der Ring aus einer kompakten Materie besteht, und wenn man dann die Anziehungskräfte berechnet, welche zwischen den verschiedenen Teilen des Körpers wirken, und die Wirkung der Saturnmasse auf ihn, so ergibt sich daraus kein stabiles Gleichgewicht. Dadurch ist man zur Diskussion verschiedener Hypothesen geführt worden, indem man nach einer Verteilung der Materie suchte, die den gestellten Bedingungen genügt.

Diese Bedingungen also, die als ein zu erreichendes Ziel zu betrachten sind, bestehen vor der unbekannten Verteilung der Ringmasse nur in der Anordnung unserer Erkenntnisse, die sich als Umkehrung derjenigen darstellt, welche wir uns als reale Ordnung vorstellen.

Nach diesen Beispielen wird man das Erklärungsverfahren der Biologie, bei dem von dem Zusammenhang eines Organs mit einer Funktion oder von der Art zu reagieren im Verhältnis zu einem nützlichen Zweck die Rede ist, leichter verstehen. Diese Ausdrucksweisen können so umgeformt werden, daß jeder scheinbare Widerspruch mit dem physikalischen Determinismus verschwindet. Man muß nämlich festhalten, daß unter den mannigfachen Bestandteilen der Erscheinung das *Leben* uns synthetisch *früher* gegeben erscheint als seine angenommenen Faktoren: aber nicht in der Wirklichkeit, sondern nur in der Ordnung unserer Erkenntnisse. Demnach steigen wir von der bekannten Funktion zu

den Eigenschaften des Organes auf, die zu ihrer Erklärung geeignet sind. Aus dem Umstand, daß das Plasma lebt, schließen wir auf das wahrscheinliche Vorhandensein einer gewissen Fähigkeit, in nützlicher Weise zu reagieren, wenigstens solange es sich um Reize handelt, welche nicht den Tod herbeiführen, usw.

Ein derartiges Erklärungsverfahren wäre vollkommen und würde sich in einer Erklärung nach dem physikalischen Typus verwandeln, wenn beim Aufsteigen von der gegebenen Wirkung zu den Ursachen man die ganze Gruppe der in Betracht kommenden Ursachen bestimmen könnte, durch deren Zusammenwirken die Erscheinung experimentell reproduzierbar wäre. Dies ist bisher bei den eigentlich physiologischen Erklärungen noch nicht gelungen. Aber dennoch repräsentieren sie einen gewissen Grad von positiver Erkenntnis, der durch die vorangehenden Bemerkungen ins Licht gesetzt wurde.

Es gelingt uns in der Tat, von den Wirkungen, die wir uns im Leben als „Ziele" vorstellen, zu einigen der nächstliegenden Ursachen aufzusteigen, die zu ihrer Entstehung zusammenwirken, und von diesen nach und nach zu den verborgensten Bedingungen und zu den entferntesten Ursachen.

Nur ist hier die Kette komplizierter und länger, und wir sind nicht imstande, die Reihe umzukehren, so wie der Chemiker nicht imstande ist, durch die Analyse der Farben ein RAPHAELsches Bild zu erklären!

§ 41. Das Leben und die thermodynamischen Hauptsätze.

Bisher haben wir keinen unauflöslichen Widerspruch zwischen der mechanistischen Hypothese und den Wissenschaften vom Leben gefunden.

Um unsere Untersuchung fortzusetzen, müssen wir diejenigen Prinzipien der Physik einer Verifikation

unterwerfen, die aus den allgemeineren mechanischen Hypothesen entspringen. Wir übergehen die *Erhaltung der Materie*, die auch für das Gebiet des Lebens gilt und wollen von den energetischen Prinzipien sprechen und besonders von denen der Thermodynamik.

Vor allem *ist das Prinzip der Erhaltung der Energie auch im Gebiete der Lebenserscheinungen verifiziert.*

Darüber hinaus weiß man nichts Positives.

Es wäre sehr interessant, genauere Untersuchungen in bezug auf den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik anzustellen.

Nach der mechanischen Hypothese erscheint derselbe als mittlere Wirkung in einem *ungeordneten* System. Nun erheben sich in unserem Falle gegen die Anwendung des Postulats der Mittelwirkung schwere Zweifel.

Was drückt im Grunde dieses Postulat aus? Es stellt einen mathematischen Ausdruck dar für die Annahme einer gewissen *statistischen Regelmäßigkeit* in einer großen Anzahl von Erscheinungen, deren Unterschiede nicht auf *systematisch* wirkende Ursachen zurückgeführt werden können. Die statistische Regelmäßigkeit täuscht nun den Zustand einer *scheinbaren Homogeneität* vor; aber der eigentliche Charakter der lebenden Materie ist im Gegenteil eine innere *Heterogeneität;* der Gedanke, daß aus dieser sich eine *Ordnung der Bewegung* ergibt, bietet sich sehr natürlich dar.

Aber anderseits macht es Schwierigkeiten, eine solche Annahme in Einklang zu bringen mit der Beständigkeit des Lebens. Neben einem geordneten kinetischen System erscheinen unendlich viele ungeordnete möglich, so daß der Übergang von dem einen zum anderen unendlich kleinen Änderungen entspricht. Demnach wäre das Bestehen eines geordneten Zustandes nicht zu erklären.

Wie man sieht, reicht die mechanische Hypothese für sich vielleicht nicht aus, die Gültigkeit des CLAUSIUS-

schen Satzes für das Gebiet des Lebens abzuleiten, aber sie läßt sie wahrscheinlich erscheinen.

Wie man nun auch die theoretischen Gründe bewerten mag, die Antwort kann nur von der Erfahrung gegeben werden. Die thermodynamische Erforschung der physiologischen Vorgänge muß das Problem lösen, *ob das* CLAUSIUSsche *Postulat auch für die Lebenserscheinungen gilt.*

Es scheint, daß die Frage von der Seite der Pflanzen her leichter zu lösen ist, und einige Ergebnisse über die Mitwirkung des Lichtes bei den chemischen Transformationen, die die dort auftretenden Prozesse begleiten, lassen eine bejahende Antwort erwarten.

§ 42. Die mechanistische Hypothese und die Probleme der Entwickelung.

Aus der vorstehenden Untersuchung ergibt sich, daß wenigstens nach dem jetzigen Stande der Wissenschaft *die Biologie keinen Widerspruch gegen die mechanistische Hypothese enthält.*

Aber dieses Ergebnis ist rein negativ, und es handelt sich jetzt darum, die *positive Bedeutung* der Hypothese zu erkennen.

Unsere Behauptung ist, daß *die mechanistische Hypothese für den Fortschritt der Biologie als indifferent betrachtet werden kann.*

Vor allem hat die Diskussion in § 39 gezeigt, daß ein theoretischer Physizismus, der durch das mechanische Modell nahegelegt wird, nicht als praktischer Gesichtspunkt für die Untersuchung in Betracht kommen kann. Die entfernte Möglichkeit des genannten Modells bleibt in dieser Hinsicht ohne Einfluß auf die Art der Erklärung der Lebenserscheinungen.

An zweiter Stelle ist leicht festzustellen, daß die mechanistische Hypothese in ihrer unbestimmten All-

gemeinheit außerstande ist, die allgemeinen Probleme der Biologie in einem Sinne eher als in einem anderen zu lösen, z. B. die *epigenetische* oder die *präformistische* Tendenz, welche bei der Erklärung der *organischen Entwickelung* eine Rolle spielen, zu unterstützen.

Man kann verschiedene mechanische Modelle konstruieren, die innerhalb gewisser Grenzen einen stationären Zustand aufweisen, so daß die folgenden Fälle auftreten:

1. Jeder Mechanismus durchläuft periodisch dieselben Phasen, abgesehen von einer zufälligen Veränderung, die sich für die verschiedenen Mechanismen statistisch kompensiert. Aber äußere Kräfte erzeugen in jedem Mechanismus eine Veränderung in einem bestimmten Sinne, indem sie so eine Entwickelung des mittleren Typus der Reihe hervorrufen.
2. Die statistische Periodizität der Mechanismen der Reihe bleibt bestehen: aber die äußeren Kräfte erzeugen eine bestimmte Entwickelung des mittleren Typus nicht dadurch, daß sie imstande sind, die Entwickelung des einzelnen Mechanismus in erheblichem Maße zu beeinflussen, sondern dadurch, daß sie eine Auswahl vollziehen, durch Zerstörung des stationären Gleichgewichts derjenigen Mechanismen, deren Veränderung sich in einem gewissen Sinne vollzieht.
3. Die Mechanismen der Reihe zeigen eine angenäherte Periodizität; der mittlere Typus wiederholt sich fast periodisch, aber über die starke periodische Veränderung überlagert sich eine langsame Veränderung in einem bestimmten Sinne.

Sieht man nun von der Schwierigkeit ab, diesen Modellen eine genauere Gestalt zu verleihen, so erkennt man leicht, daß sie die Möglichkeit beweisen, die drei

Fundamentalhypothesen mit dem Mechanismus in Einklang zu bringen, die zur Erklärung der Entwickelung der Lebewesen herangezogen werden, und in denen den *inneren* und *äußeren* (Umgebung) Ursachen der Veränderung eine verschiedene Bedeutung beigelegt wird.[1]) Dies sind die folgenden Hypothesen:

1. Die erblichen individuellen Variationen vollziehen sich in indifferenter Weise, so daß aus den inneren Faktoren sich eine strenge statistische Periodizität der Eigenschaften ergibt, d. h. die Erhaltung der Art; aber *die Umgebung verändert das Lebewesen*, und die durch Anpassung erworbenen Eigenschaften werden durch Vererbung auf die neuen Generationen übertragen (LAMARKsche Hypothese).
2. Die individuellen inneren Variationen würden wieder als Ergebnis eine statistische Ausgleichung, d. h. die Beständigkeit des mittleren Typus ergeben, aber mittels des Kampfes ums Dasein *vollzieht die Umgebung eine Auswahl der nützlichen Variationen*, die sich wieder durch Vererbung übertragen, so daß die Entwickelung der Art eine bestimmte Richtung erhält (DARWINsche Hypothese).

---

1) Es ist kaum nötig, hervorzuheben, daß, abgesehen von der Bewertung ihrer Faktoren, die *Entwickelungshypothese* allgemein aus folgenden Gründen angenommen wird:

1. die direkten Beweise, welche die Paläontologie bietet;
2. die indirekten Beweise, die man aus der botanischen und zoologischen Geographie entnimmt;
3. erklärt die Entwickelungshypothese eine Reihe von anatomischen und zoologischen Tatsachen, z. B. die rudimentären Organe usw.;
4. liefert die Evolutionshypothese ein leitendes synthetisches Kriterium für die wissenschaftliche Untersuchung und hat dadurch für den heutigen Fortschritt der Naturwissenschaft eine große Bedeutung.

3. Die inneren erblichen Variationen kompensieren sich nicht genau im Mittel, sondern schreiten in einem bestimmten Sinne fort (EIMERS *Orthogenese*), d. h. die Entwickelung der Art vollzieht sich genau analog zu der ontogenetischen Entwickelung (die Kontinuität des Keimplasmas bei WEISMANN führt zu der Ansicht, daß sich die Art wie ein Individuum von großer Lebensdauer verhält). In dieser Hypothese spielt die Umgebung eine nebensächliche und mehr negative Rolle. Die natürliche Zuchtwahl wirkt im allgemeinen auf die *Erhaltung* der Art (PFEFFER), deren Wirksamkeit indirekt durch gewisse Rückbildungen wie die der blinden Maulwürfe *(Panmixia)* bewiesen wird.

§ 43. Die Unerheblichkeit der mechanischen Erklärung in der Biologie.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen erkennen, daß die mechanische Hypothese in ihrer unbestimmten Allgemeinheit genommen, für den Fortschritt der Wissenschaften vom Leben gleichgültig ist.

Aber mehr noch: abgesehen von der Schwierigkeit, für jede gegebene Art von Lebenserscheinungen den hypothetischen Mechanismus aufzufinden, muß man sich fragen, welche Bedeutung in bezug auf die uns interessierenden Fragen die spezielle Beschreibung desselben und die Kenntnis der verknüpfenden quantitativen Verhältnisse haben könnte.

Wir haben schon hervorgehoben, welches die eigentliche Bedeutung der mechanischen Erklärung für die physikalischen Erscheinungen ist. Die Schwierigkeiten einer Gesamterklärung zerfallen in zwei Teile:

1. in dem einen handelt es sich darum, mittels einer fundamentalen mechanischen Hypothese die Be-

ziehungen zwischen gewissen abstrakterweise als *Größen* betrachteten Daten aufzustellen;

2. in dem anderen um die *Deutung* dieser Verhältnisse mit Hilfe der *ergänzenden Hypothesen*, indem zu den direkt quantitativen die *qualitativen Voraussagen* hinzutreten.

Der Mechanismus erschöpft die Kenntnis der Erscheinungen nicht einmal in den Fällen, in denen er genauer beschrieben werden kann. Die Schwingungen einer Saite, welche der Mathematiker als optische Tatsache mit Hilfe der FOURIERschen Reihe darstellt, enthalten Harmoniebeziehungen, die zwar mit der Form der Reihe in Verbindung gebracht werden können, die aber immer eine *Interpretation* oder *Assoziation* darstellen, die zu den Gesichtseindrücken *hinzukommen*, die durch sie symbolisiert werden.

Nun hat die Lösung des ersten Problems eine um so größere relative Bedeutung, in je höherem Grade der größte Teil der gestellten Fragen sich auf *Messungen* bezieht. Dagegen bleiben die erwähnten bestimmenden Gleichungen, welche die fundamentale mechanische Hypothese ausdrücken, um so bedeutungsloser, je mehr der Gebrauch der ergänzenden Hypothesen steigt, die zu ihrer Deutung verhelfen.

Wenn wir nun die physikalischen Probleme in einer Reihe ordnen, in der das *Interesse* an der mechanischen Erklärung abnimmt, so *stellen sich die Probleme des Lebens als Grenzfall dieser Reihe dar.*

Die mechanische Erklärung erscheint also in diesem Gebiete der Wissenschaft als unerheblich.

Es ist von Interesse, das vorstehende Ergebnis mit dem zu vergleichen, zu dem DU BOIS REYMOND bei der Behandlung des mechanischen Problems des Lebens gelangte.

Die Unmöglichkeit, die biologische Tatsache durch die mechanische Erklärung zu erschöpfen, leuchtete dem

großen Philosophen ein; aber diese Unmöglichkeit wurde von ihm in einem agnostischen Sinne gedeutet!

Dies rührt jedoch nur daher, daß er eine falsche Ansicht von dem Wesen der wissenschaftlichen Erklärung hatte, die an die willkürlichen Schranken einer quantitativen Metaphysik gebunden war.

Das Problem ist unlösbar, weil es schlecht gestellt ist, und das angebliche agnostische Ergebnis reduziert sich auf die Erkenntnis, daß diejenigen Beziehungen, welche den Gegenstand biologischer Voraussagen bilden, *in geringerem Grade* als die physikalischen als quantitative Verhältnisse aufgefaßt werden können, auch wenn man die Möglichkeit eines mechanischen Modells zuläßt.

§ 44. Schluß.

Unser Ergebnis ist, daß nach dem gegenwärtigen Stande der Erkenntnis *die mechanistische Hypothese den Lebenserscheinungen zwar nicht widerspricht, aber für ihre Untersuchung ohne Belang ist.*

Immerhin besaß diese Hypothese vorübergehend eine große Bedeutung in erster Linie deshalb, weil sie in klarer Form die Unabhängigkeit des Wissens vom Gefühl (vgl. § 36) feststellte; in zweiter Linie, weil sie die wissenschaftliche Weltansicht vereinheitlichte. Durch den verborgenen Mechanismus lernte man auch in dem Leben einen eigentlichen Gegenstand der Wissenschaft erkennen und den engen Zusammenhang verstehen, der zwischen den Verfahrungsarten besteht, die in verschiedenen wissenschaftlichen Gebieten angewandt werden und die nur deshalb getrennt sind, weil die Notwendigkeit der Arbeitsteilung dies erfordert, die aber bei der konkreten Voraussage zusammenwirken, d. h. in Wirklichkeit vereinigt sind.

Um sich von dem so erreichten Ergebnis eine adäquate Vorstellung zu machen, muß man sich in die Zeiten des

DESCARTES zurückversetzen, als die Gedanken HARVEYS über den Kreislauf des Blutes ein Hindernis fanden in den herrschenden Vorurteilen über die *Lebenskraft*, an die man bei jedem Lebensvorgang appellierte.

Es war ein ungeheuerer Fortschritt, als man begriff, daß es nur eine einzige Physik gibt, die sich ohne Einschränkung auch auf die Lebenserscheinungen bezieht, und es war ein großartiger Gedanke, der dazu führte, die physikalischen Tatsachen als einfache und gleichförmige Gesetze zu betrachten, welche die Mannigfaltigkeit der Bedingungen beherrschen.

Die komplizierende Wirkung der letzteren ergibt eine Korrektion, die bei einer ersten Annäherung vernachlässigt werden kann.

Daraus ergibt sich eine gerechte Beurteilung der vereinheitlichenden Tendenz des Mechanismus. Sie liefert eine adäquate Vorstellung der ersten Entwickelung der Wissenschaften vom Leben. Erst ein weiter fortgeschrittener Standpunkt läßt erkennen, daß die einheitliche Ansicht mit etwas engen und einseitigen Hilfsmitteln konstruiert ist, weil man als vollkommen und allgemein den Typus einer höher entwickelten Wissenschaft annahm und jede andere Form des Wissens allzu starr dem unterzuordnen suchte.

So wird die Ansicht der mechanistischen Philosophie modifiziert durch die Fortschritte der Biologie, welche ihrerseits auf die Physik zurückwirkend uns vorbereitet auf das Verständnis einer höheren Einheit, d. h. eines vollkommeneren und allgemeineren Typus der Wissenschaft, welcher die verschiedenen durch die Erfordernisse der Technik getrennten Formen unter sich begreift.

Dieser höhere Typus, der den verschiedenen Wissensgebieten angemessen ist, ist kein starres dogmatisch aufgestelltes Schema, noch ist er eine Anhäufung von Er-

gebnissen, die einfach aneinandergereiht werden. Er ist vielmehr ein *Verfahren der Assoziation und Abstraktion*, welches auf die Sinnesdaten ausgeübt wird und die Begriffe der realen Invarianten bildet. Er ist eine Entwickelung von Zusammensetzungen und Trennungen, die sich in die beiden Phasen, die induktive und die deduktive, auseinanderlegt und zu einer *fortschreitenden Erweiterung und Korrektion unserer Voraussagen* führt.

Ähnlich wie in den verschiedenen Formen der Entwickelung des Lebens kann diese Entwickelung langsamer und länger oder schneller und kürzer sein. Die induktive und deduktive Phase können als getrennte Momente des wissenschaftlichen Prozesses auftreten, wie man dies bei der Physik beobachten kann, oder sie können sich verschlingen und gewissermaßen ineinander übergehen, wie dies in der Biologie der Fall ist.

Die Vergleichung ist nun unter zwei reziproken Gesichtspunkten interessant: Nur aus der Physik kann man sich ein Bild machen von dem Grade der Vollkommenheit, welchen in Zukunft die Wissenschaften vom Leben erreichen können. Aber die ungeheure Kompliziertheit der letzteren und die Unbeständigkeit der biologischen Erklärungen, die daraus folgt, lassen uns die Bewegung der Wissenschaft klarer erkennen, welche bei einigen Arten von physikalischen Erscheinungen nur in Jahrhunderten sichtbar wird. Es gelingt uns so, zu verstehen, daß die *genaue Erkenntnis* nur eine *gut angenäherte* Erkenntnis ist, die nur so lange als genügend angesehen werden kann, als man sich auf einen gewissen Kreis von Voraussagen beschränkt, die aber in bezug auf einen größeren Kreis früher oder später eine Korrektur erfahren muß, bei der die vernachlässigten komplizierenden Bedingungen berücksichtigt werden.

Wir wollen aus den bereits früher behandelten Gegenständen ein Beispiel entnehmen.

Die GALILEI-NEWTONsche Dynamik scheint heute, nach zwei Jahrhunderten, eine Korrektionshypothese in dem Sinne zu erfordern, daß die abstrakte Unterscheidung gewisser die Bewegung bestimmender Daten, nämlich der in bezug auf den bewegten Körper *inneren* und *äußeren*, durch ein Postulat der *Vererbung* (bestimmender Einfluß der früheren Bewegung) oder des *Zusammenhanges* des Bewegungsfeldes ergänzt wird (§ 33).

Nun weisen die Worte selbst, durch die die Korrektionshypothese bezeichnet wird, auf eine Analogie mit gewissen Arten von bestimmenden Umständen, welche im Gebiete des Lebens auftreten. Die Biologen, welche die Entwickelung der organischen Arten studieren, streben gerade nach einer Trennung (wie bei der Bewegung) der *inneren* und *äußeren* Faktoren der Veränderung (Präformismus und Epigenese) und benutzen fortwährend den Gedanken der Vererbung und des Zusammenhangs der Organe. Auf einem komplizierteren Gebiete hat sich also der synthetische Gesichtspunkt früher eingestellt und drängt sich mit größerer Evidenz auf; in einer scheinbar einfachen Theorie erscheint er erst, wenn man eine größere Genauigkeit verlangt.

So können wir sagen, daß *die Entwickelung der Wissenschaften vom Leben sich darstellt als eine abgekürzte Wiederholung derjenigen der physikalischen Wissenschaft.*



Autorenverzeichnis.



Sachregister.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

den philosophischen Geist. Rob. Mayer, Helmholtz, Hertz sind seine Vertreter, und das Energiegesetz ist ‚der größte Fortschritt der allgemeinen Wissenschaftslehre seit der Kritik der reinen Vernunft‘. Auf Grund solcher Anschauung rückt Riehl auch die Erörterung über naturwissenschaftlichen und philosophischen Monismus in den Mittelpunkt.“

(Straßburger Post.)

Volkmann, Dr. P., Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Fähigkeiten der Naturwissenschaften und Monismus der Gegenwart. [38 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M* 1.—.

Während der Verfasser in einer früheren Rede den naturwissenschaftlichen Monismus einer Betrachtung unterzogen hat, wendet er sich in dem vorliegenden Vortrage dem vulgären und philosophischen Monismus zu. Im besonderen finden sich behandelt: Die Rolle des entwicklungsgeschichtlichen Gedankens und der Formalismus im Monismus.

—— Die materialistische Epoche des neunzehnten Jahrhunderts und die phänomenologisch-monistische Bewegung der Gegenwart. [30 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M* 1.—.

Die Rede nimmt Stellung zu einer Reihe aktueller Fragen; von besonderem Interesse ist vielleicht als Beitrag zu einer Psychologie der Völker die Behandlung von Kant als Typus des deutschen Idealismus, von Laplace als Typus des französischen Materialismus. Wie man Frankreich als Wiege des Materialismus bezeichnen kann, wird man von einer Empfänglichkeit der germanischen Rasse für den Monismus sprechen können.

Voß, Dr. A., Professor an der Universität München, über das Wesen der Mathematik. [98 S.] gr. 8. 1908. Geh. *M* 3.60.

„. . . Den größten Genuß wird die Schrift den Mathematikern selbst bereiten, insbesondere durch den neben der eigentlichen Rede einhergehenden, ihr an Umfang fast gleichen kritischen Apparat, in welchem der Autor zu vielen strittigen Fragen, vornehmlich zu solchen, die dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie angehören, Stellung nimmt. Dadurch erhebt sich die kleine Publikation über den Rahmen einer bloßen Gelegenheitsschrift und erlangt bleibenden Wert.“

(E. Czuber in der Neuen Freien Presse.)

Weinstein, Geheimer Regierungsrat, Professor Dr. B., Privatdozent an der Universität Berlin, die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen, gehalten an der Universität Berlin. [XIV u. 543 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. *M* 9.—.

Das Buch enthält eine Auseinandersetzung über die Grundlagen der Wissenschaften, insbesondere der Naturwissenschaften. Der Ableitung eines Systems der Grundlagen geht die Untersuchung über ihren Inhalt voraus und folgt eine Darlegung der psychischen Tätigkeiten, welche für die Ermittelung der Grundlagen maßgebend sind. Bei der Auseinandersetzung der Beziehungen unserer Wahrnehmungen zur Außen- und Innenwelt kommen insbesondere physiologische und psychologische Verhältnisse zur Sprache. Hierauf werden die Hauptgrundlagen vom Standpunkte der Erfahrung und der Metaphysik einer genaueren Zergliederung und Untersuchung unterzogen: der Begriff der Zeitlichkeit, Räumlichkeit, Substanzialität und Ursächlichkeit, sowie das Wesen von Zeit, Raum, Substanz und Ursache. Den Schluß bildet die Behandlung derjenigen Grundlagen, die der Welterhaltung und Weltentwicklung dienen, sowie der Grundlagen, aus denen Erklärungen der Natur- und Lebenserscheinungen fließen.

